

## פרמה

משפט פרמה הקטן: יהי  $p$  ראשוני ו- $a$  זר ל- $p$  אזי  
 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

1. נתון ראשוני  $p \neq 2, 5$ . האם קיים מספר שמתחלק ב- $p$  וברישום העשרוני שלו מופיעה רק הספרה 1?

2. נתונה סדרה חשבונית  $a_n$  שבה ההפרש זר לאיבר הראשון. הוכיחו כי ניתן למצוא שלם  $b$  ותת-סדרה אינסופית של  $a_n$  שבה כל האיברים הם חזקות שלמות של  $b$ .

3. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים שלא ניתן להציגם בצורה:  
א.  $a^2 + b^2$  כאשר  $a, b$  שלמים.  
ב.  $a^2 + b^2 + c^2$  כאשר  $a, b, c$  שלמים.  
ג.  $a^3 + b^3 + c^3$  כאשר  $a, b, c$  שלמים.  
ד.  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6$  כאשר  $a, b, \dots, g$  שלמים.

4. האם לכל ראשוני  $p$  וטבעי  $c$  קיים  $x$  כך ש  $x^x = c \pmod{p}$ ?

5. הוכיחו כי לכל ראשוני  $p$  קיים  $n$  עבורו  $6^n + 3^n + 2^n - 1$  מתחלק ב- $p$ .

6. האם קיימת סדרה  $p_1, p_2, \dots$  של מספרים ראשוניים המקיימת ש- $p_{n+1} = 2p_n + 1$  לכל  $n \geq 1$ ?

7. יהי  $p$  ראשוני. הוכיחו כי  $7p + 3^p - 4$  אינו ריבוע שלם.

8. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה  $a^3 + 3ab^2 + 7b^3 = 2011$ .

9. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה  $5x^2 - 2y^5 = 1009$ .

10. א. יהי ראשוני  $p$ , הוכיחו כי כל המחלקים הראשוניים של  $2^p - 1$  הם 1 מוד  $p$ .  
ב. יהי ראשוני  $p$ . הוכיחו כי קיימים אינסוף ראשוניים מהצורה  $kp + 1$  עבור  $k$  טבעי.

11. האם קיים  $k$  כך שהמכפלה של  $k$  הראשוניים הראשונים היא מספר מהצורה  $a^n + 1$  עבור  $a, n$  שלמים גדולים מ-1?

**בתאבון!**