

## שאלות

1. נסחו והוכיחו סימני חלוקה ב-2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 27, 37, 41, 271101.
2. המספר  $\overline{abcde}$  מתחלק ב-123. הוכיחו כי גם המספר  $\overline{bcdea}$  מתחלק ב-123.
3. מצאו מספר טבעי, שאם מעבירים את ספרת האחדות שלו להתחלה, הוא גדל פי 2.
4. \* מצאו מספר טבעי שש-ספרתי,  $N = \overline{abcdef}$  שאם מעבירים בו מספר ספרות מהסוף להתחלה (ומקבלים את המספרים  $\overline{fabcde}, \overline{efabcd}, \overline{defabc}, \overline{cdefab}, \overline{bcdefa}$ ) אז המספרים שמתקבלים הם  $2 \cdot N$ ,  $3 \cdot N$ ,  $4 \cdot N$ ,  $5 \cdot N$ ,  $6 \cdot N$  אבל לאו דווקא בסדר זה.
5. רושמים את כל המספרים מ-112 עד 444 ברצף בסדר כלשהו. האם יתכן שהמספר הארוך שנוצר הוא חזקה של 3? נמקו.
6. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים שלא ניתן להציגם בצורה:
  - א.  $a^2 + b^2$  כאשר  $a, b$  שלמים.
  - ב.  $a^2 + b^2 + c^2$  כאשר  $a, b, c$  שלמים.
  - ג.  $a^3 + b^3 + c^3$  כאשר  $a, b, c$  שלמים.
  - ד.  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 + g^6$  כאשר  $a, b, \dots, g$  שלמים.
7. הציגו את  $\frac{3^{60} - 1}{80}$  כסכום של חזקות רביעיות של מספרים שלמים, עם כמות מינימלית של מחוברים.
8. מה עשויה להיות ספרת האחדות של:
  - א. מספר ראשוני של פרמה? (כלומר מספר ראשוני מסוג  $2^k + 1$ )
  - ב. מספר ראשוני של מרסן? (כלומר מספר ראשוני מסוג  $2^k - 1$ )
9. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה  $a^3 + 3ab^2 + 7b^3 = 2011$ .
10. הוכיחו כי לכל ראשוני  $p$  קיים  $n$  עבורו  $6^n + 3^n + 2^n - 1$  מתחלק ב- $p$ .
11. \* מצא את כל זוגות הראשוניים  $p, q$  כך ש  $pq | 5^p + 5^q$ .

## תכונות של שאריות שכדאי לזכור

תכונות שקשורות להזקות:

א.  $n^2 = 0, 1 \pmod{4}$ .

ב.  $n^2 = 0, 1, 4 \pmod{8}$  (כי  $(2k+1)^2 = 8\frac{k(k+1)}{2} + 1 = 8m+1$ ).

ג.  $n^3 = 0, \pm 1 \pmod{7}$  (כי  $n^6 = 0, 1 \pmod{7}$ ).

ד.  $n^3 = 0, \pm 1 \pmod{9}$  (כי  $(3k \pm 1)^3 = 27k^3 \pm 27k^2 + 9k \pm 1 = 9m \pm 1$ ).

ה.  $n^4 = 0, 1 \pmod{16}$  (מתקבל מ-ב').

ו. לכל ראשוני  $p$ , המשוואה  $x^2 = a \pmod{p}$  אינה פתירה אם  $a^{\frac{p-1}{2}} = -1 \pmod{p}$ .

מספרים	סדר של 10
9, 3	1
11	2
37, 27	3
101	4
271, 41	5
13, 7	6

מספרים שעבורם סדר של 10 קטן: