

אינטגרציה לפי אופיין אוילר

אופיין אוילר זה $V - E + F$ או בכללי $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots$.

הוא מוגדר למרחב תאי (שמודבק מדיסקים טופולוגיים) ומהווה אינווריאנט טופולוגי.

מתקיים כלל הכלה\הדחה $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$. לכן אפשר לחשוב על

אפיין אוילר בתור מידה (כמובן, שהקבוצות קשורות לחלוקה תאית). בהינתן פונקציה

$f: X \rightarrow R$ כאשר X מרחב תאי, R חוג קומוטטיבי, ו- f פונקציה נחמדה כלומר מקבלת

ערכים קבועים על תאים של איזושהי חלוקה תאית, מתקיים: $\int_B f(x) \cdot d\chi(x)$.

דוגמאות:

$$F \rightarrow E$$

↓

קל לראות שבמכפלה קרטזית ואפילו בפיברציה

B

מתקיים $\mu(E) = \mu(B) \cdot \mu(F)$.

אנו טוענים טענה יותר חזקה. העתקה $\phi: X \rightarrow Y$ נקראת נחמדה, אם יש חלוקה תאית, ועל התאים העתקה היא פיברציה.

טענה בסגנון פוביני. אם $\phi: X \rightarrow Y$ העתקה נחמדה, $f: Y \rightarrow R$ פונקציה נחמדה, אז

$$\int_X f(x) \cdot d\chi(x) = \int_Y \left(\int_{\phi^{-1}(y)} f(x) \cdot d\chi(x) \right) \cdot d\chi(y)$$

מתקיימת הנוסחה:

מקרה פרטי. אם $\phi: X \rightarrow Y$ כיסוי d -שכבתי מסועף, ונגיד $b(x)$ מספר הסתעפות, אז

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - \int_X (b(x) - 1) d\chi(x)$$

דוגמאות:

1. נוסחת רימן-הורביץ: הגנוס של עקום כללי מדרגה d הוא $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. מה אם עקומות

שיש לה כמה נקודות שהם צומת או חוד?

2. משפט פונסלה קשור לעקום אליפטי.

3. בעקום מישורי חלק: יש $3d(d-2)$ נקודות פיתול והדרגת העקום דואלי היא $d(d-1)$.

חידות:

1. האם יתכן שקיימת פונקציה $f: K \rightarrow K$ עם מספר סופית של נקודות אי-רציפות כך

$$f(f(x)) = -x, \text{ כאשר:}$$

א. $K = [-1, 1]$

ב. $K = (-1, 1)$

2. שדרגו את הנוסחאות $3d(d-2)$ ו- $d(d-1)$ למקרה של עקום שהוא לא חלק, שיש לו גם צמתים וחודים (אבל לא משהו יותר מסובך).

3. עקום מישורי אי-פריק ממעלה 4, כמה נקודות סינגולריות יכולות להיות לו?

4. נתון עקום אלגברי גנרי ממעלה 4 במישור פרויקטיבי מרוכב. כמה משיקים כפולים יש לו?