אלgוריתם אוקלידס

$\gcd(m,n)$ = המספר הכי גדול שמחלק גם את m וגם את n
m,n נקראים זרים אם $\gcd(m,n)=1$ (אין להם מחלק משותף הגדול מ-1)

1. הוכיחו שהשברים $\frac{14n+3}{21n+4}, \frac{12n+1}{30n+2}, \frac{3n^2+2n+2}{7n^2+5n+5}$ מצומצמים לכל n שלם חיובי.

2. תהי $S \subseteq \mathbb{Z}$ קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים שסגורה ביחס לחיסור (כלומר אם x,y נמצאים בS אז גם $x-y$ נמצא בS). הוכיחו שקיים n שלם עבורו $S=\{\dots,-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,\dots\}$ (כלומר S היא קבוצת כל המספרים המתחלקים בn).

3. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם 3^n+5^n מתחלק ב-$3^{n-1}+5^{n-1}$.

4. יהיו n,a,b שלמים חיוביים כך ש- $\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a+b\sqrt{2}$. הוכיחו ש-$a$ ו-b זרים זה לזה.

5. יהיו a,b שלמים חיוביים זרים ויהי p מספר ראשוני אי-זוגי. הוכיחו כי $\gcd\left(a+b,\frac{a^p+b^p}{a+b}\right)$ שווה 1 או p.

6. יהיו $n \geq k$ שלמים חיוביים. הוכיחו כי $\frac{\gcd(k,n)}{n}\binom{n}{k}$ הוא מספר שלם.

7. הסדרה a_n מוגדרת באופן הבא: $a_1=1, a_{2n}=a_n+1, a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}$. הוכיחו כי כל מספר רציונלי חיובי מופיע בסדרה זו בדיוק פעם אחת.

8. הוכיחו שאם a,b שלמים זרים ו-n,k שלמים חיוביים, אז:
$$\gcd(a^n-b^n,a^k-b^k)=a^{\gcd(k,n)}-b^{\gcd(k,n)}$$

9. יהיו n,k שלמים חיוביים זרים. למה יכול להיות שווה $\gcd(5^n+7^n,5^k+7^k)$?

10. יהיו a,k,n שלמים חיוביים כך ש-$n \neq k$. למה יכול להיות שווה $\gcd\left(a^{2^n}+1,a^{2^k}+1\right)$?

11. תהי f_n סדרת פיבונצ'י: $f_1=f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$.
א. הוכיחו שכל שני איברים עוקבים בסדרה זרים זה לזה.
ב. הוכיחו שלכל n,k מתקיים $f_{n+k}=f_{n+1}\cdot f_k+f_n\cdot f_{k-1}$.
ג. חשבו את $\gcd(f_{f_{f_{2015}}},f_{f_{f_{2020}}})$.

12*. יהי p ראשוני אי-זוגי, ותהי $f:\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}_{>0}\to\{0,1\}$ פונקצייה המקיימת:
- $f(1,1)=0$
- $f(a,b)+f(b,a)=1$ לכל $a,b\in\mathbb{Z}_{>0}$ זרים זה לזה, שלא שניהם שווים 1.
- $f(a+b,b)=f(a,b)$ לכל $a,b\in\mathbb{Z}_{>0}$ זרים זה לזה.

הוכיחו כי $f(1^2,p)+f(2^2,p)+\dots+f((p-1)^2,p)\geq\sqrt{2p}-2$.

בתיאבון!