# דואליות

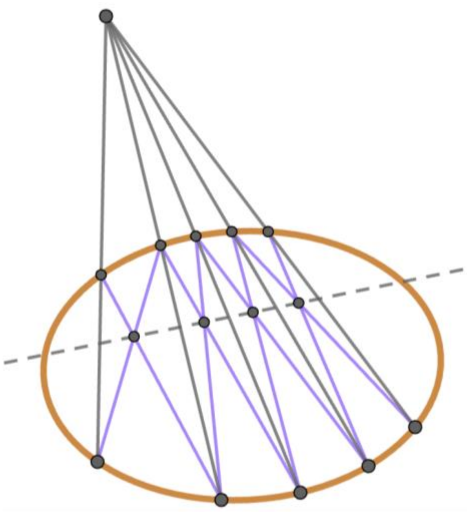
## הסברים

דואליות זו העתקה שמעבירה נקודות לישרים וישרים לנקודות בצורה שמשמרת יחס שייכות – אם $P \in \ell$ אז $\ell' \in P'$.

דוגמא – בקואורדינטות פרויקטיביות, נקודה זה $(x:y:z)$ וישר זה משוואה מהצורה $ax+by+cz=0$. כלומר ישר גם מאופיין ע״י שלשה $(a:b:c)$, ונגדיר שזה פשוט הנק' הדואלית לישר.

דוגמא (דואליות ביחס לשניונית) – ניקח שניונית $\alpha$. אז דואליות ביחס ל-$\alpha$ זו דואליות שמעבירה כל נק' על השניונית לישר המשיק בנק' זו. אם נרצה לחשב את הדואליות של נק' כללית, נעביר ממנה שני משיקים לשניונית וניקח את הישר בין נק' ההשקה.

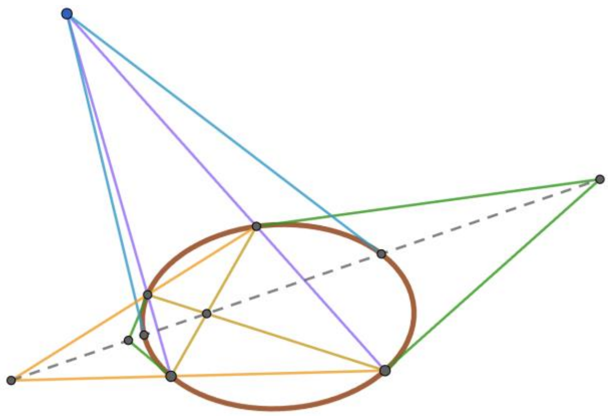
אפשר לאפיין את הדואליות הזו בעוד דרך, באמצעות הטענה הבאה:



<u>למת האיקסים</u>: תהא $\alpha$ שניונית ותהא $A$ נק' כלשהי. לכל זוג ישרים $\ell_1, \ell_2$ דרך $A$, אפשר לקחת את נק' החיתוך שלהם עם השניונית $\ell_1 \cap \alpha = X_1, Y_1$ ו-$\ell_2 \cap \alpha = X_2, Y_2$ ולהתבונן בנק' $X_1Y_1 \cap X_2Y_2$. המקום הגיאומטרי של כל הנק' מהצורה הזו הוא ישר. יתר על כן, לכל נק' $B$ על הישר הזה, אם נעביר את הישר $AB$ ונסמן את נק' החיתוך שלו עם $\alpha$ ב-$P, Q$ אז $(A,B;P,Q)=-1$, כלומר זו רביעייה הרמונית.

*הוכחה*: נעביר את $A$ לאינסוף ואת $\alpha$ למעגל ואז הטענה ברורה. □

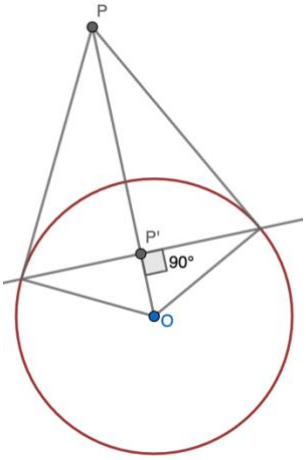
ללמת האיקסים יש הרבה מסקנות. את רובן אפשר לסכם בציור הבא:



מקרה פרטי מעניין הוא דואליות ביחס למעגל. במקרה הזה אנחנו יכולים להגיד קצת יותר דברים:

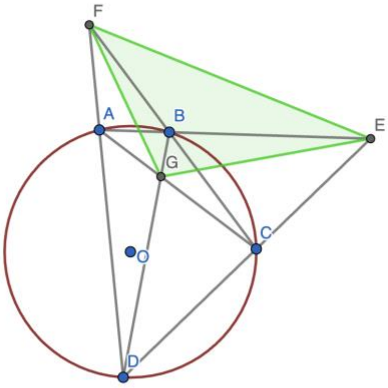
<u>טענה</u>: יהי $\Omega$ מעגל עם מרכז $O$. אז:

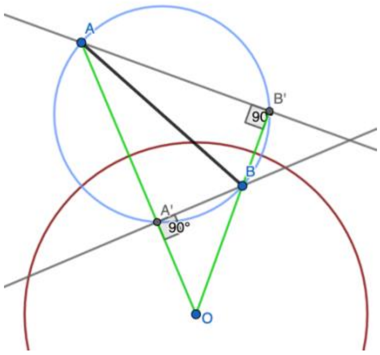
1. הדואלי של נק' $P$ זה ישר שעובר בנק' האינברסית ל-$P$ ומאונך ל-$OP$.
2. הדואלי של ישר $\ell$ זו הנק' האינברסית לעקב האנך מ-$O$ ל-$\ell$.
3. עבור מרובע חסום, משולש מפגשי הצלעות הנגדיות דואלי לעצמו ומפגש הגבהים שלו נמצא ב-$O$.
4. דואליות משמרת זוויות, כאשר חושבים על נק' בתור הקרן מ-$O$ לנק'. כלומר: $\angle(OA, \ell) = \angle(a, L)$ וכו'.
5. אם $B$ על הדואלי של $A$, אז המעגל עם קוטר $AB$ מאונך ל-$\Omega$. בנוסף הדואלי לאמצע הקטע $AB$ הוא הציר הרדיקלי של $\Omega$ והמעגל עם קוטר $AB$.




*הוכחה*:

1. נסמן את נק' ההשקה של המשיקים מ-$P$ למעגל ב-$B, C$. אז הדואלי ל-$P$ הוא $BC$. אינברסיה מ-$O$ מעבירה את $BC$ למעגל $OBCP$, ש-$OP$ הקוטר שלו. לכן הנק' האינברסית ל-$P$ על $BC$ ו-$OP \perp BC$.
אם $P$ בתוך המעגל ולא בחוץ הטענה עדיין נכונה (למשל כי היא אלגברית). אפשר גם לחשב יחסים כפולים – אם הישר $OP$ חותך את המעגל ב-$XY$ אז ידוע ש-$(P, P'; X, Y)$ רביעייה הרמונית.
2. ברור מ-1.
3. המשולש דואלי לעצמו בגלל האיקסים, ו-$O$ מפגש הגבהים בגלל 1.
4. ברור בגלל 1 ו-2 וחשבון זוויות טריוויאלי.
5. נסמן את האינברסיים של $A, B$ ב-$A', B'$. אז לפי 1, נקבל ש-$AA'BB'$ הוא המעגל (וזה המעגל עם קוטר $AB$). הוא נשמר תחת אינברסיה ולכן מאונך ל-$\Omega$. אם נסמן אותו ב-$\omega$ ואת המרכז שלו ב-$O'$, אז המשיקים מ-$O'$ ל-$\Omega$ עוברים ב-$\Omega \cap \omega$ (בגלל שהמעגלים מאונכים) ולכן הטענה על הציר הרדיקלי נכונה.



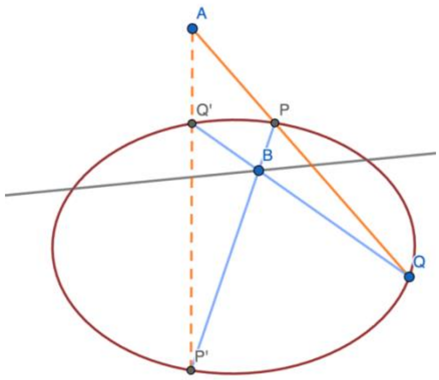




מש"ל □

נטען כעת עוד כמה טענות שימושיות על דואליות.

הבחנה: הציור של דואליות הוא ציור פרויקטיבי. אם הדואלי של $A$ ביחס ל-$\alpha$ הוא $a$, אז הדואלי של $f(A)$ ביחס ל-$f(\alpha)$ הוא $f(a)$ כאשר $f$ העתקה פרויקטיבית.

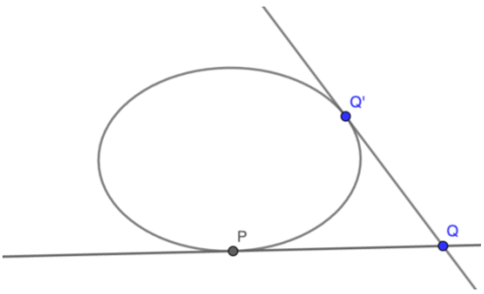
טענה: הציור של האיקסים הוא קשיח. למשל, אם $B$ על הדואלי של $A$, וישר כלשהו דרך $A$ חותך את השניונית ב-$P, Q$, אז אם נסמן את החיתוכים השניים של $PB, QB$ עם השניונית ב-$P', Q'$, אז $AP'Q'$ ישר.




*הוכחה:* הדואלי ל-$B$ עובר ב-$A$ וגם בחיתוך הישרים $PQ \cap P'Q'$. כלומר הוא חותך את $PQ$ גם ב-$A$ וגם ב-$PQ \cap P'Q'$ ולכן נק' אלה מתלכדות.

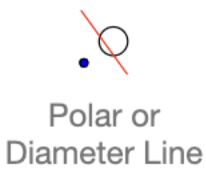
טענה: דואליות היא העתקה פרויקטיבית, במובן שהיא משמרת יחס כפול.

*הוכחה:* יהיו $A, B, C, D \in \ell$. צריך להוכיח ש-$(A, B; C, D) = (a, b; c, d)$. זה ברור אם נעביר את השניונית למעגל ואת $\ell$ לאינסוף נק' על $\ell$ מתאימות לישרים דרך מרכז המעגל בכיוון המאונך.




מסקנות:

- אם $\alpha$ שניונית, $P$ נק' על השניונית, ו-$\ell$ המשיק ב-$P$, אז ההעתקה שמעבירה נק' $Q \in \ell$ לנק' ההשקה של המשיק השני שלה ל-$\alpha$ היא העתקה פרויקטיבית מ-$\ell$ ל-$\alpha$.
- דואליות מעבירה שניוניות לשניוניות.



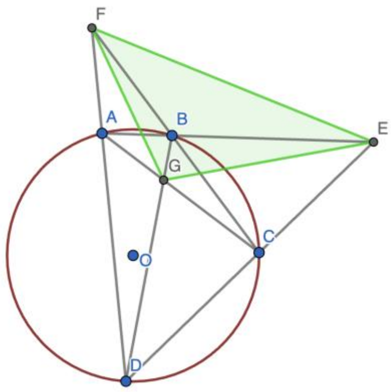

טענה: אפשר לצייר דואלי בקלות ב-Gebra.

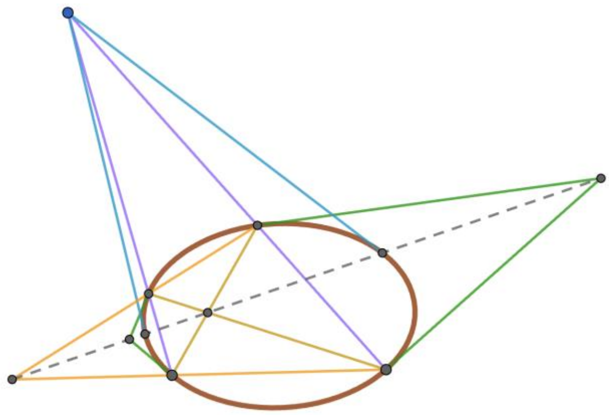
*הוכחה:* הכלי Polar.

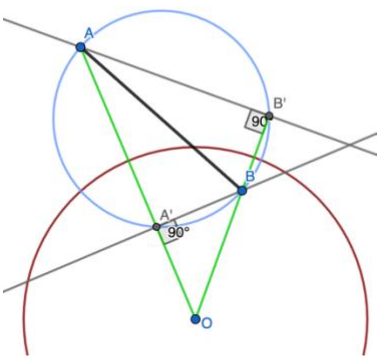
הערה: למי שיודע קצת אלגברה לינארית, אפשר לתאר דואליות גם בשפה הזו – נק' במישור הפרויקטיבי זה כיוון ב-$\mathbb{R}^3$, אבל נחשוב על זה כוקטור. ישר זה מישור, אבל בעצם גם עליו אפשר לחשוב כוקטור, הנורמל למישור – הוקטור $u$ מגדיר את המישור $u^t v = 0$. למעשה ההתאמה הזו זו בדיוק הדואליות המפגרת שראינו בהתחלה. עבור שניונית, אם היא מוגדרת ע"י המשוואה $v^t A v = 0$ אז דואליות ביחס אליה זה $u \mapsto u^t A$. אכן, זו העתקה שמעבירה נק' לישרים ולפי הגדרה בדיוק מתקיים שהדואלי של נק' על השניונית עובר לישר דרך עצמה (ואפשר גם לראות שהוא המשיק).

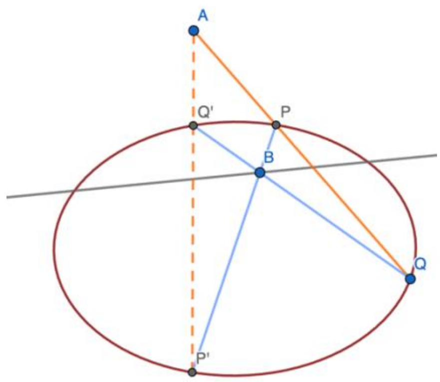
# דף מסרים

1. ציור האיקסים הוא גם קשות וגם קשיח
2. רביעיות הרמוניות זה שלב טוב
3. בדואליות ביחס למעגל $\Omega$:
   a. $O$ מפגש הגבהים של משולש מפגשי צלעות נגדיות (שדואלי לעצמו)
   b. אם $X \in \bar{Y}$ אז $\widehat{XY} \perp \Omega$ (והדואלי של אמצע $XY$ הוא הציר הרדיקלי)





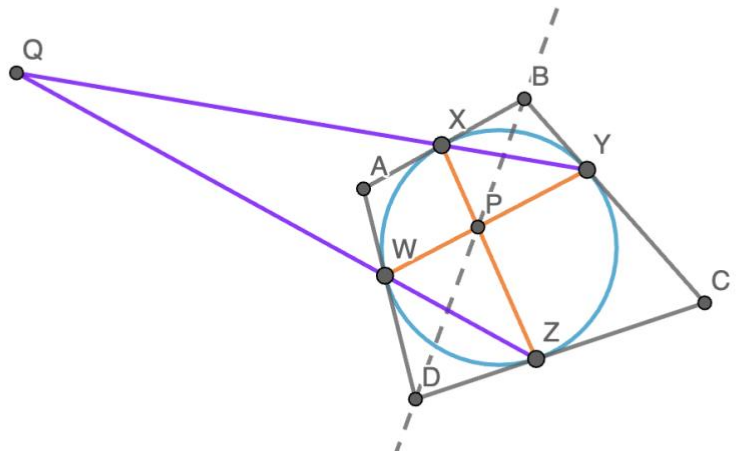



# פתרונות

1. נתון מרובע חוסם $ABCD$. נסמן את נק' ההשקה של $AB, BC, CD, DA$ עם המעגל ב-$X, Y, Z, W$ בהתאמה. הוכיחו כי $AC, BD, XZ, YW$ נפגשים בנקודה.

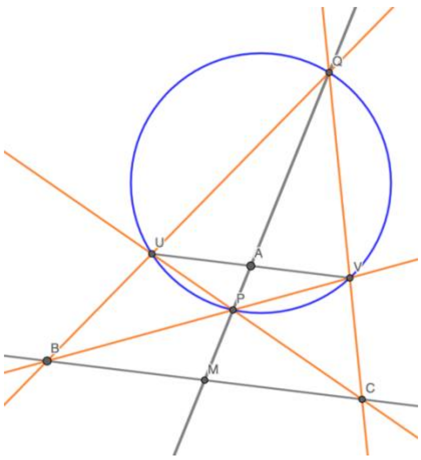
<u>פתרון:</u> יש הרבה ניסוחים שקולים לפתרון, נספר אחד מהם.

נסמן $P = XZ \cap YW$. נוכיח ש-$AC, BD$ עוברים שם. נשים לב שאנחנו כאן רואים כאן חלק מציור האיקסים – נסמן $Q = XY \cap ZW$, ונקבל ש-$P$ על הדואלי של $Q$. בנוסף גם $B, D$ על הדואלי של $Q$ (כי הישר $XY$ עובר ב-$Q$ והוא דואלי ל-$B$, בדומה עבור $D$). לכן $B, P, D$ נמצאות על ישר אחד. באופן דומה $A, P, C$ ישר. מש"ל



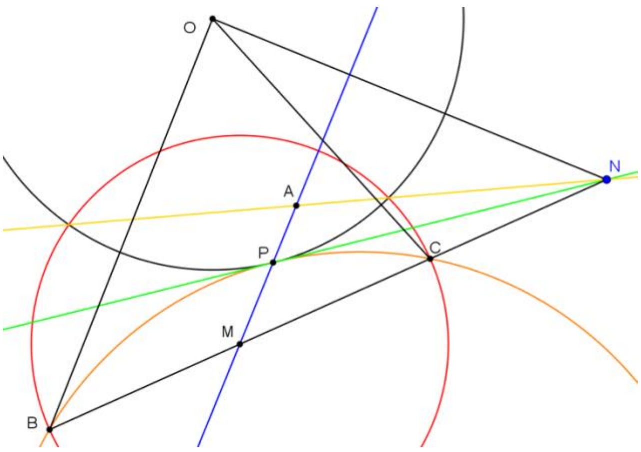

2. נתון מעגל $\Omega$ ומשולש ABC הדואלי לעצמו ביחס ל-$\Omega$ (כלומר ש-$A, B, C$ דואליים ל-$BC, AC, AB$) כך ש-$A$ נמצאת בתוך $\Omega$. נסמן ב-$M$ את אמצע הקטע $BC$ וב-$P$ את החיתוך של הקטע $AM$ עם $\Omega$. הוכיחו כי המעגל $BCP$ משיק ל-$\Omega$.

<u>פתרון ראשון:</u> כל משולש שדואלי לעצמו מגיע ממרובע חסום. נחפש מרובע שיהיה לנו נוח. ניקח את הישר $AM$ בתור אחד מאלכסוני המרובע – נסמן את נק' החיתוך שלו עם $\Omega$ ב-$P, Q$. אז נקבל שבהכרח $BP, CQ$ נפגשים על המעגל וגם $BQ, CP$ נפגשים על המעגל – אם נעביר את הישרים $CQ, CP$ ונסמן את החיתוך שלהם עם המעגל ב-$U, V$, אז ממשפט האיקסים $QU \cap PV$ זה הדואלי ל-$CA$ כלומר זה בדיוק $B$.



כעת נשים לב ש-$(B,C;M,\infty_{BC})$ רביעייה הרמונית, אבל מצ'בה-מנלאוס (או מדואליות בכללי) אנחנו יודעים שגם $(B,C;M,UV\cap BC)$ רביעייה הרמונית ולכן בהכרח $UV||BC$. בפרט יש הומותטיה מ-$P$ שמעבירה את $U,V$ ל-$C,B$, ולכן היא תעביר את $\Omega$ למעגל שמשיק לו ועובר ב-$B,C,P$, ובפרט נקבל מש"ל.

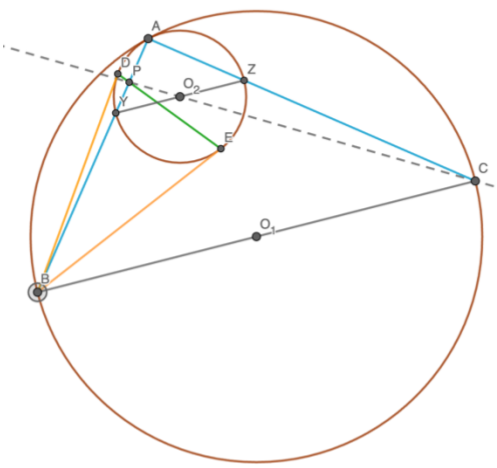
פתרון שני: נסמן ב-$N$ את הדואלי ל-$AM$. אז $N$ על $BC$ ועל המשיק ב-$P$ ל-$\Omega$ ולכן היא החיתוך שלהם. אז בעצם צריך להוכיח ש-$NB\cdot NC=NP^2$, או באופן שקול ש-$N$ על הציר הרדיקלי של $\Omega$ ושל המעגל עם קוטר $BC$.




נשים לב ש-$N$ הוא הדואלי ל-$AM$ (כי הוא על הדואלי ל-$A$ ועל הדואלי ל-$P$). בגלל שהדואלי ל-$B$ עובר דרך $C$, המעגל עם קוטר $BC$ מאונך ל-$\Omega$. לכן הציר הרדיקלי של שני המעגלים האלה הוא בעצם הדואלי ל-$M$ ביחס ל-$\Omega$ ולכן הציר הרדיקלי הנ"ל עובר ב-$N$. מש"ל.

3. נתונים מעגלים $\omega_1,\omega_2$ שמשיקים באופן פנימי בנקודה $A$. נסמן ב-$O_1,O_2$ את המרכזים של $\omega_1,\omega_2$ בהתאמה. יהי $BC$ קוטר של $\omega_1$ ו-$E,D$ נקודות על $\omega_2$ כך ש-$BE,BD$ משיקים ל-$\omega_2$. הוכיחו כי $DE,AB,CO_2$ נפגשים בנקודה אחת.

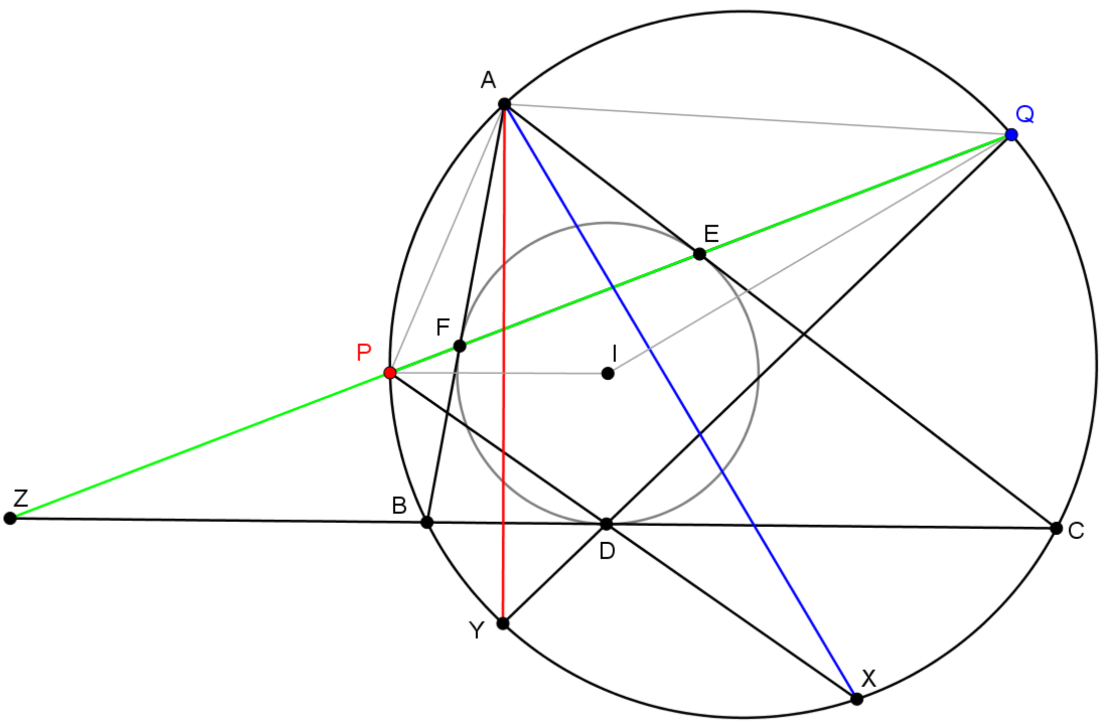
פתרון: $DE$ הוא הישר הדואלי ל-$B$ ביחס ל-$\omega_2$. לכן אם נסמן את $DE\cap AB$ ב-$P$ ואת החיתוך השני של $AB$ עם $\omega_2$ ב-$Y$, אז נקבל ש-$(A,Y;P,B)=-1$. נצייר גם את הישר $AC$ ונסמן את החיתוך השני שלו עם $\omega_2$ ב-$Z$. אז מההומותטיה ב-$A$ נקבל ש-$YZ$ מקביל ל-$BC$ והוא קוטר ב-$\omega_2$. נטיל את הרביעייה ההרמונית $(A,Y;P,B)$ דרך $C$ על הישר $YZ$. נקבל ש-$(Z,Y;CP\cap YZ,\infty_{YZ})$ רביעייה הרמונית ולכן בהכרח $CP\cap YZ$ הוא אמצע $YZ$ כלומר שווה ל-$O_2$. בפרט $CO_2$ עובר ב-$P$, מש"ל.



4. משולש $ABC$ חסום במעגל $\Omega$ וחוסם מעגל $\omega$ שמרכזו $I$. הצלעות $BC, AC, AB$ משיקות ל-$\omega$ בנקודות $D, E, F$. הישר $EF$ נחתך עם $\Omega$ בנקודות $P, Q$. הוכיחו כי $\angle PIQ = \angle APD + \angle DQA$.

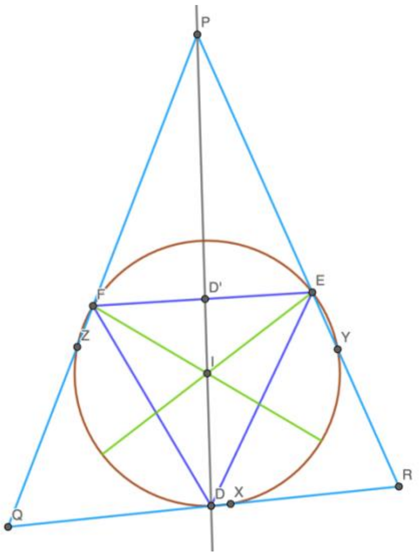
<u>פתרון:</u> נמשיך את $PD, QD$ עד לחיתוכים השניים עם $\Omega$ ב-$X, Y$ בהתאמה. נשים לב ש-$\angle APD + \angle DQA = \angle YAX$. מצד שני, הדואליים של $P$ ו-$Q$ (ביחס למעגל החסום) הם ישרים שעוברים ב-$A$, והזווית ביניהם היא בדיוק $\angle PIQ$. לכן אפשר לנסות לנחש שהישרים הדואליים של $P, Q$ יהיו $AY, AX$ בהתאמה (אפשר גם לראות את זה בציור).

ננסה להבין את הציור יותר טוב. מה זו הנק' $Y$? כל מה שאנחנו יודעים עליה זה שהיא ההטלה של $D$ דרך $Q$. אבל אנחנו יודעים ש-$(B, C; D, Z)$ רביעייה הרמונית, ולכן נקבל ש-$(B, C; Y, P)$ רביעייה הרמונית. לכן הציור שלנו הוא כזה – יש מעגל, ויש שני ישרים שמשיקים לו $AE, AF$. יש נק' $P$ על $EF$, ויש ישר $AY$ כך ש-$(AE, AF; AY, AP)$ רביעייה הרמונית. צ"ל ש-$AY$ הוא הדואלי של $P$. אבל זה ברור כי הדואלי של $P$ עובר ב-$A$, ואם נחתוך את הישרים עם הישר $EF$ נקבל ש-$(E, F; AY \cap EF, P)$ רביעייה הרמונית ולכן בהכרח $AY \cap EF$ על הדואלי. לכן הדואלי הוא $AY$.



5. נסמן את אמצעי הצלעות במשולש $ABC$ כ-$M_A, M_B, M_C$. נסמן את נק' החיתוך של המשיק למעגל החסום מ-$M_A$ עם $M_BM_C$ ב-$A'$. נגדיר $B', C'$ באופן דומה. הוכיחו כי $A', B', C'$ נמצאות על ישר אחד.

<u>פתרון 1:</u> . נסמן את נק' ההשקה של המעגל החסום עם הצלעות ב-$D, E, F$. אם נסמן את נק' ההשקה של המשיק מ-$M_A$ למעגל החסום ב-$X$, אז הדואלי של $M_A$ ביחס למעגל החסום הוא $DX$. באופן דומה נגדיר $Y, Z$.

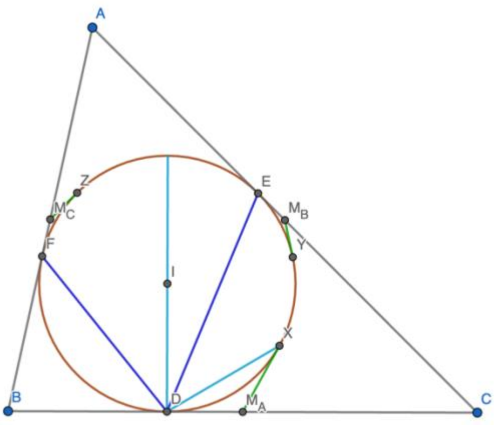



אז בעצם הציור שיש לנו הוא כזה. יש מעגל ויש עליו נק' $X, Y, Z, D, E, F$. צריך להבין איך $X$ מוגדר מ-$D, E, F$, אבל נשים את זה בצד כרגע.

ננסה להבין איך נראית הנק' $A'$ בציור זה. הדואלי של $M_B$ זה EY ושל $M_C$ זה $FZ$ ולכן הדואלי של $M_BM_C$ זה $FZ \cap EY$ – נסמן אותה ב-$P$. המשיק מ-$M_A$ זה בדיוק המשיק ב-$X$ למעגל ולכן הדואלי שלו זה פשוט $EX$. לכן בעצם צריך להוכיח את הדבר הבא – יש את המשולש $P, Q, R$ שמורכב מהצלעות $DX, EY, FZ$, וצריך להוכיח שהישרים ל-$X, QY, RZ$ נחתכות בנק'.

זו טענה קלאסית על שניונית שחותכת משולש שבעצם הטענה שקולה לכך ש-$PD, QE, RF$ נחתכים בנקודה.

<u>סיום 1:</u> נעשה דואליות חזרה ונראה מה זה אומר. הישר $PD$ עובר לנק' שהיא החיתוך של הדואלי של $P$ והדואלי של $D$ – הדואלי של $P$ הוא $M_BM_C$ כמו שהראנו, והדואלי של $D$ זה המשיק ב-$D$ כלומר פשוט הצלע $BC$. לכן הדואלי של $PD$ זו הנק' באינסוף בכיוון של $BC$. באופן דומה הדואליים של $QE, RF$ גם גם באינסוף ובפרט כולם על ישר. לכן הישרים המקוריים נפגשים בנק', מש"ל.



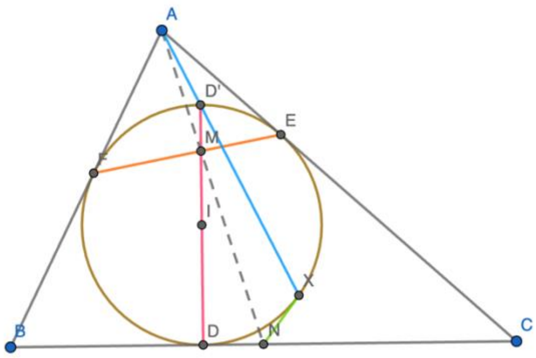

<u>סיום 2:</u> ננסה להבין איך $X, Y, Z$ מוגדרות. ננסה להבין מה הדואלי של $M_A$ ביחס למעגל החסום. כל מה שאנחנו יודעים על $M_A$ זה ש-$(B, C; M_A, \infty_{BC}) = -1$. נעשה דואליות ונקבל $(DE, DF; DX, DI) = -1$. אז זו בעצם ההגדרה שלנו – אנחנו מתחילים ממשולש $DEF$ שחסום

במעגל שמרכזו $I$, ובונים נק' $X, Y, Z$ לפי התנאי על הרביעיות ההרמוניות.

כעת ננסה להבין יותר טוב את הנק' $P = EY \cap FZ$. אנחנו יודעים ש-$(EF, ED; EI, EY) = -1$. בנוסף $(FE, FD; FI, FZ) = -1$. נתבונן בישר $DI$. נסמן את נק' החיתוך שלו עם $EF$ ב-$D'$. אז הרביעייה הראשונה כשמטילים אותה מ-$E$ על $DI$ עוברת ל-$(D', D; I, EY \cap DI)$ והרביעייה השנייה עוברת ל-$(D', D; FZ \cap DI)$. שתיהן הרמוניות ולכן חייב להתקיים $EY \cap DI = FZ \cap DI$, ובפרט $P \in DI$.

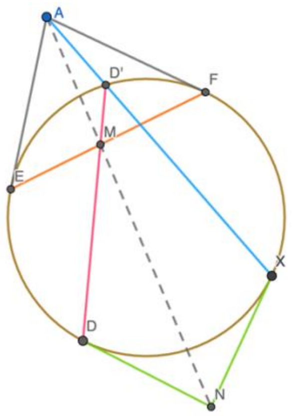
לכן נקבל כי הישרים $PD, QE, RF$ נחתכים בנק' (הם עוברים ב-$I$), ומכאן מטענה קלאסית על חיתוכים של שניונית עם צלעות משולש נקבל שגם $PX, QY, RZ$ נחתכים בנק'. מש"ל

<u>פתרון 2:</u> נשים לב שאם ניקח את הישרים $M_AD, M_BE, M_CF$ ונחתוך אותם עם הצלעות, נקבל 3 נק' על ישר (ישר האינסוף). הישרים בשאלה מתקבלים מלקחת כל ישר כזה ולשקף אותו ביחס לישר ל-$I$ – המשיק השני מ-$M_A$ הוא השיקוף של $MD$ ביחס ל-$MI$. אפשר לחשב ככה את היחס שבו המשיק השני מחלק את הצלע הנגדית ואז לעשות מנלאוס (למעשה יותר קל לחשב את היחס של הזוויות ואז מנלאוס זוויתי).




6. המעגל החסום במשולש $ABC$ משיק לצלעות $BC, AC, AB$ ב-$D, E, F$ בהתאמה. $DI$ נחתך עם $EF$ ב-$M$ הוכיחו כי $AM$ חוצה את $BC$.

<u>פתרון ראשון (דואליות)</u>: נסמן את אמצע $BC$ ב-$N$. ננסה להבין את הדואלי של $N$. בדומה לשאלה 5, נעביר את המשיק השני $NX$, ונקבל ש-$(DE, DF; DI, DX) = -1$. נסמן ב-$D'$ את הנק' הנגדית ל-$D$ על המעגל החסום. אז מהרביעייה ההרמונית הנ"ל נקבל ש-$(E, F; D', X) = -1$. לכן $AD'X$ ישר.



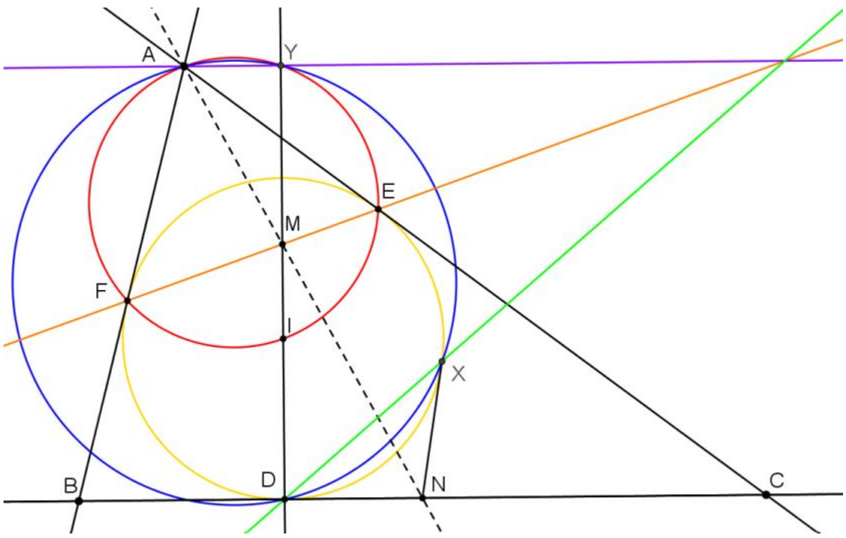

לכן נוכל לנקות את הציור ולהישאר עם הציור הבא, שבו צריך להוכיח ש-$AMN$ ישר. אבל זה ברור – אם נעביר את $XM$ ונחתוך אותו שוב עם המעגל בנק' $X'$, נקבל ציור של איקסים (ולכן חייב להתקיים ש-$AX'D$ ישר) ולכן בפרט נקבל ש-$AMN$ ישר.

הערה: בהינתן שהגענו לציור הנ"ל, ניתן לסיים בעוד דרכים. למשל אפשר להזיז את $D$ על המעגל ולבדוק ב-3 נקודות.

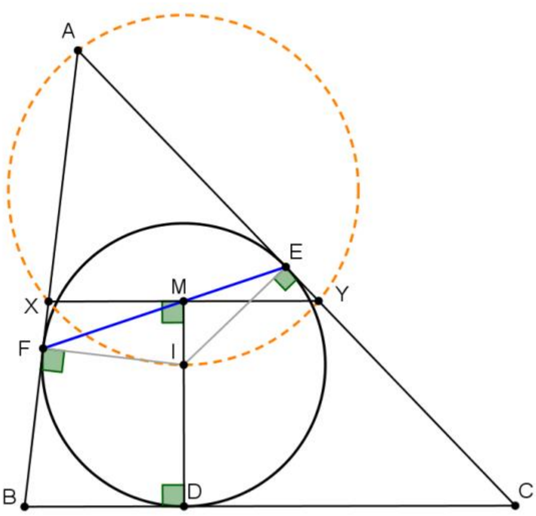
פתרון שני (דואליות + מעגלים): במקום להוכיח ש-$A, M, N$ נמצאות על ישר, נוכיח שהדואליים שלהן נחתכים בנקודה.

הדואלי של $A$ הוא $EF$. הדואלי של $M$ הוא הישר $A\infty_{BC}$ – כי הוא חיתוך הישרים $DI, EF$ שדואליים ל-$\infty_{BC}, A$ בהתאמה. הדואלי של $N$ הוא כמובן $DX$.

כמו בפתרון הקודם, ניתן לראות ש-$A, X, D'$ ישר כאשר $D'$ הנגדית ל-$D$ על המעגל החסום, ולכן $\angle AXD = 90°$. מצד שני, אם נסמן ב-$Y$ את עקב האנך מ-$A$ ל-$DI$ ($Y$ על הדואלי של $M$) אז גם $\angle AYD = 90°$ ולכן $AYXD$ חסום. נשאר לשים לב לעובדה שהצירים הרדיקליים של המעגל החסום, המעגל $AYXD$ והמעגל $AYEIF$ הם הישרים $AY, EF, DX$ ולכן נפגשים בנקודה.




פתרון שלישי (קסם): נעביר דרך $M$ ישר המקביל ל-$BC$ ונחתוך אותו עם $AB, AC$ בנקודות $X, Y$. נשים לב ש-$E, F, M$ הם עקבי אנכים מ-$I$ ל-$AC, AB, XY$ בהתאמה ולכן $I$ נמצאת על המעגל החוסם של $AXY$. בנוסף $I$ נמצאת על חוצה הזווית של $\angle XAY$ ולכן $I$ נמצאת על האנך האמצעי של $XY$ ולפיכך $M$ היא אמצע $XY$, כלומר $AM$ חוצה את $XY$ ולכן גם את $BC$.

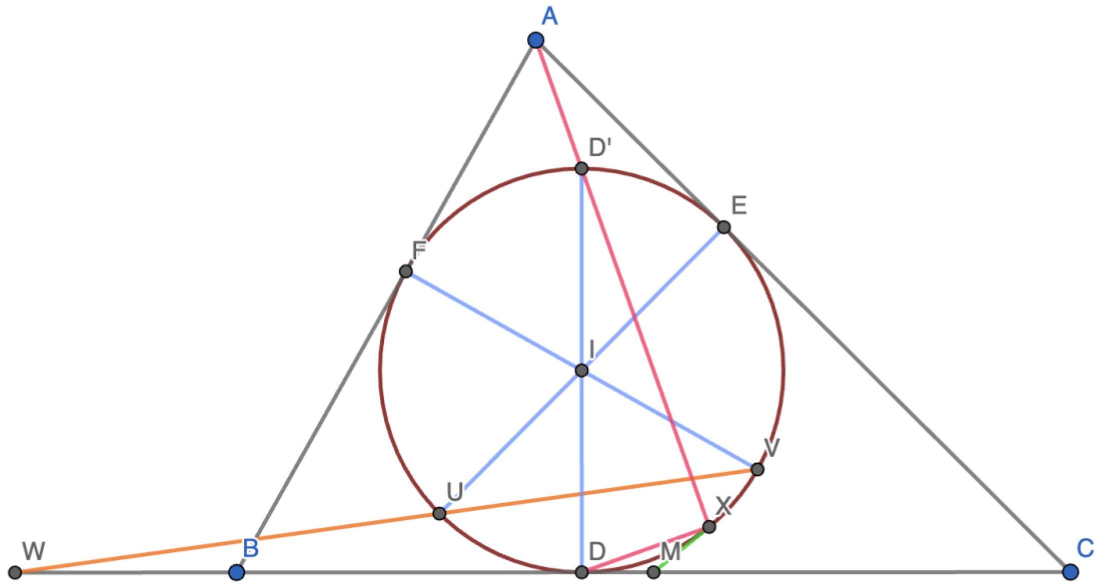



פתרון רביעי (חישוב): קל לחשב בבריצנטריות, כי יודעים את $D, E, F, I, M, A$ ולכן קל לחשב

את הישרים $EF, DI, AM$ ורק צריך לוודא שהם נחתכים בנקודה אחת.

7. המעגל החסום במשולש $ABC$ משיק לצלעות $BC, AC, AB$ ב-$D, E, F$ בהתאמה. הנקודות הנגדיות ל-$E, F$ על המעגל החסום יסומנו $U, V$. הישרים $UV$ ו-$BC$ נחתכים ב-$W$. הוכיחו כי $\angle WIM = 90°$.

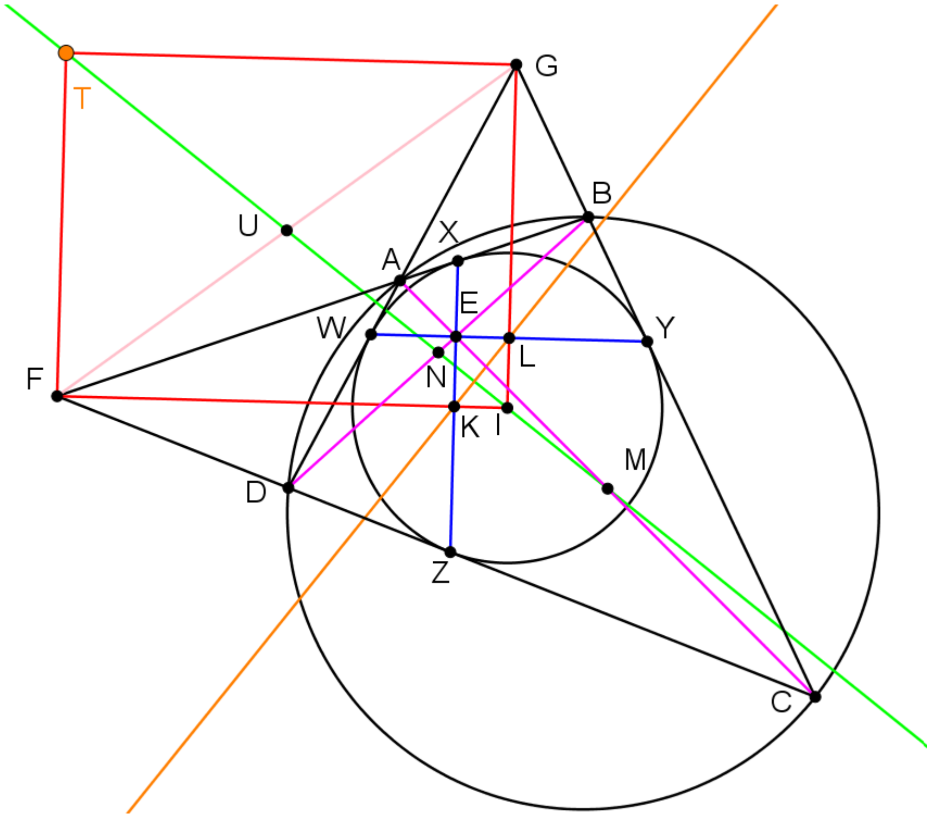
<u>פתרון:</u> הדואלי של $W$ הוא הישר בין חיתוך המשיקים מ-$U, V$ לבין $D$. אם נשקף סביב $I$, נקבל את הישר מ-$A$ לנק' הנגדית של $D$, שנסמן ב-$D'$. לפי הפתרון של השאלה הקודמת, ישר זה עובר ב-$X$, נק' ההשקה של המשיק השני מ-$M$ למעגל החסום. קיבלנו שהישר $AD'X$ קביל לדואלי של $W$. מצד שני, הדואלי של $M$ זה הישר $DX$, שמאונך ל-$D'X$. לכן הדואלי של $M$ מאונך לדואלי של $W$ ולכן $\angle WIM = 90°$.



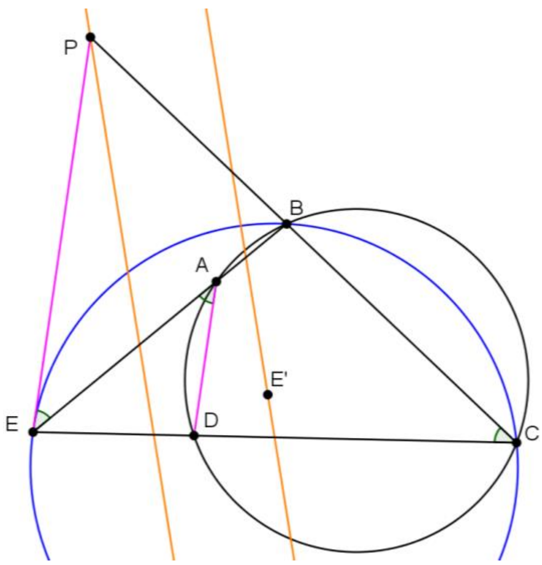

8. יהי $ABCD$ מרובע חוסם-חסום. המעגל החסום משיק לצלעות בנקודות $X, Y, Z, W$. נסמן ב-$M, N, K, L$ את אמצעי הקטעים $AC, BD, XZ, YW$ בהתאמה. הוכיחו כי $MN \perp KL$.

<u>פתרון:</u> נסמן $F \coloneqq AB \cap CD, G \coloneqq AD \cap BC, E \coloneqq AB \cap BD$. מדגל בריטי $E$ נמצאת גם על $XZ$ ו-$YW$. נסמן ב-$I$ את מרכז המעגל החסום במרובע. הנקודות $N, I, M$ נמצאות על ישר גאוס של המרובע ולפיכך בשביל להוכיח ש-$NM$ מאונך ל-$KL$ מספיק להראות שהדואלי של $KL$ ביחס למעגל החסום נמצא על ישר גאוס. הדואלי של $L$ הוא הישר העובר ב-$G$ ומאונך ל-$IL$, הדואלי של $K$ הוא הישר העובר ב-$F$ ומאונך ל-$IK$. ניזכר שבמרובע חסום-חוסם מתקיים ש-$YW \perp XZ$ ולכן הדואלי של $KL$

זו הנקודה שמשלימה את $FIG$ למלבן. חיתוך האלכסונים במלבן זה הוא אמצע $FG$ ולכן נמצא על ישר גאוס ולכן גם הדואלי של $KL$ נמצא על ישר גאוס.




9. נתון מרובע $ABCD$ חסום במעגל $\Omega$. המשכי הצלעות $AB, CD$ נפגשים בנקודה $E$. האינוורסית של $E$ ביחס ל-$\Omega$ תסומן ב-$E'$. האנך האמצעי של $EE'$ נחתך עם $BC$ בנקודה $P$. הוכיחו כי $PE||AD$.




<u>פתרון:</u> הישר העובר ב-$E'$ ומאונך ל-$EE'$ הוא הדואלי של $E$ ביחס ל-$\Omega$, האנך האמצעי של $EE'$ הוא הומותטיה חצי של הדואלי של $E$ ולכן עובר באמצעי המשיקים מ-$E$ למעגל ולכן הוא הציר הרדיקלי של $\Omega$ ושל המעגל עם מרכז ב-$E$ ורדיוס 0. לפיכך ל-$P$ דרגה שווה ביחס לשני המעגלים ולכן המעגל $BCE$ משיק ל-$PE$. נשאר לציין ש-$\angle PEP = \angle BCE = \angle BAD$.

10. משולש $ABC$ חסום במעגל $\Omega$ שמרכזו $O$. אמצעי הקשתות $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$, $\widehat{BAC}$ של $\Omega$ יסומנו ב-$N, W, E$ בהתאמה. הישר $NE$ נחתך עם הצלע $AB$ בנקודה $X$ והישר

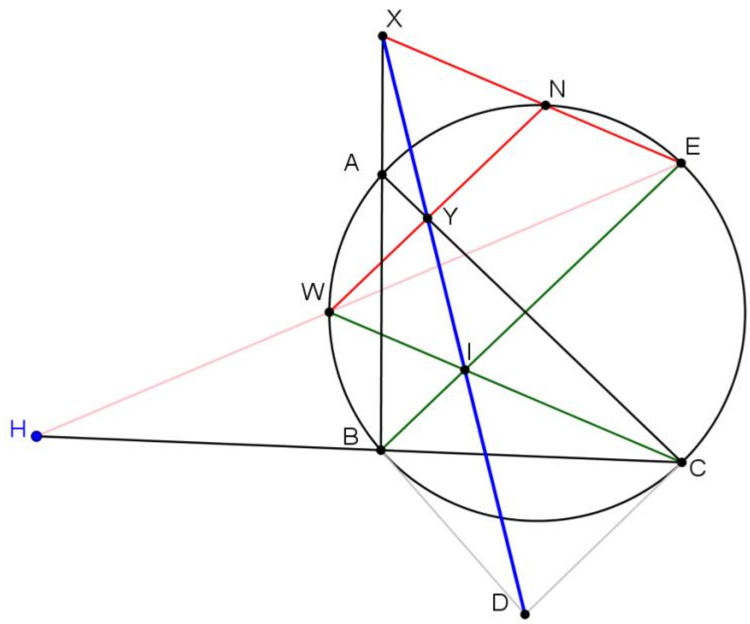
$NW$ נחתך עם הצלע $AC$ בנקודה $Y$. הוכיחו כי מפגש הגבהים של $OXY$ נמצא על $EW$.

<u>פתרון:</u> נסמן את מפגש הגבהים של $OXY$ ב-$H$. אז מפגש הגבהים של $XYH$ הוא $O$, ולכן $XYH$ דואלי לעצמו (או ליתר דיוק להומותטיה כלשהי שלו). נוכיח ש-$X$ על הדואלי של $Y$ ובדומה $Y$ על הדואלי של $X$, ונוכיח שהדואלי של $XY$ נמצא על $EW$. כך נקבל שהמשולש $XYH$ דואלי לעצמו ו-$H \in EW$.

ננסה להפוך את הציור ליותר פרויקטיבי. הישרים $BE, CW$ נחתכים ב-$I$. כדי לשלב את $N$ בצורה טובה בציור, נצייר את חיתוך המשיקים ל-$\Omega$ ב-$B, C$ ונקרא לו $D$, ונסמן את הנגדית ל-$N$ על $\Omega$ ב-$S$. אז $AS$ עובר ב-$I$ ו-$N$ זה בעצם החיתוך השני של $DS$ עם המעגל. כעת אפשר לשכוח ש-$I$ הוא מרכז המעגל חסום.

אפשר לנחש מציור ש-$X, Y, I, D$ ישר. נוכיח זאת - ממשפט פסקל על המשושה $ABBENS$ נקבל ש-$X, I, D$ נמצאות על ישר. באופן דומה נקבל ש-$Y, I, D$ נמצאות על ישר. לכן $XYID$ ישר. הדואלי של $D$ זה $BC$ והדואלי של $I$ עובר ב-$BC \cap EW$ ולכן הדואלי של $XYID$ חייב להיות $BC \cap EW$. בפרט $H \in EW$.

כעת נוכיח ש-$X$ על הדואלי ל-$Y$. נסמן את החיתוכים של $XY$ עם $\Omega$ ב-$P, Q$. אז צריך להוכיח $(P, Q; X, Y) = -1$. אבל אם נטיל מ-N נקבל שצ"ל $(P, Q; E, W) = -1$. זה נכון כי $EW$ עובר בדואלי ל-$PQ$.



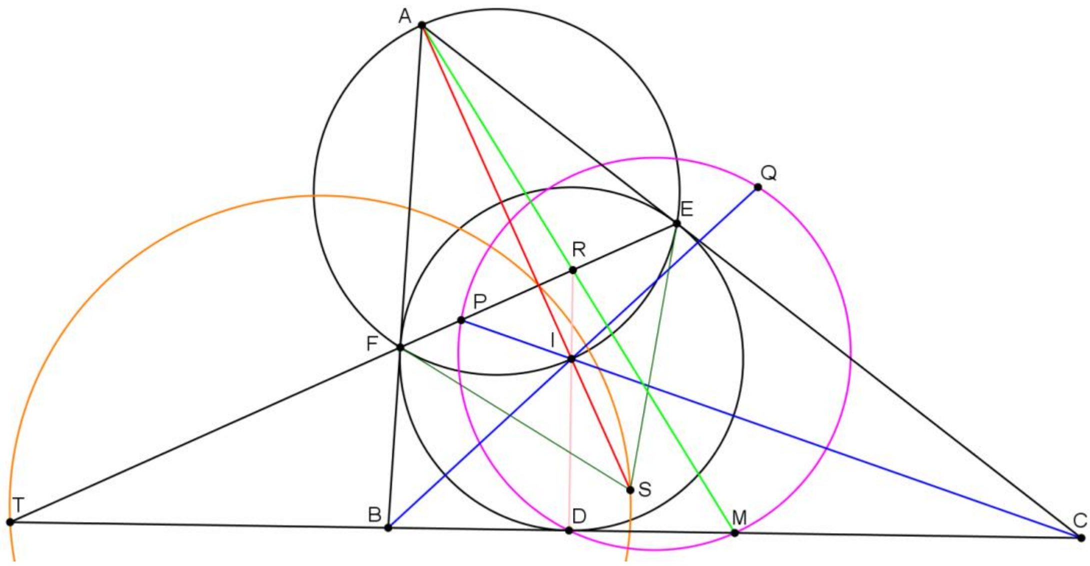
11. המעגל החסום במשולש $ABC$ משיק לצלעות $AC, AB$ ב-$E, F$ בהתאמה. המשיקים למעגל $AEF$ ב-$E, F$ נחתכים ב-$S$. הישרים $EF$ ו-$BC$ נחתכים ב-$T$. הוכיחו כי המעגל עם קוטר $TS$ מאונך למעגל 9 הנקודות של $BIC$.

פתרון: נסמן את מעגל תשע הנקודות של $BIC$ ב-$\Omega$. צריך להוכיח שהדואלי של $T$ עובר ב-$S$.

לפי הלמה האיראנית, אנחנו יודעים לתאר את מעגל תשע הנקודות של $BIC$. נסמן ב-$M$ את אמצע $BC$ ואת החיתוכים של $BI, CI$ עם $EF$ ב-$Q, P$. אז מעגל 9 הנקודות של $BIC$ הוא המעגל $DMQP$.

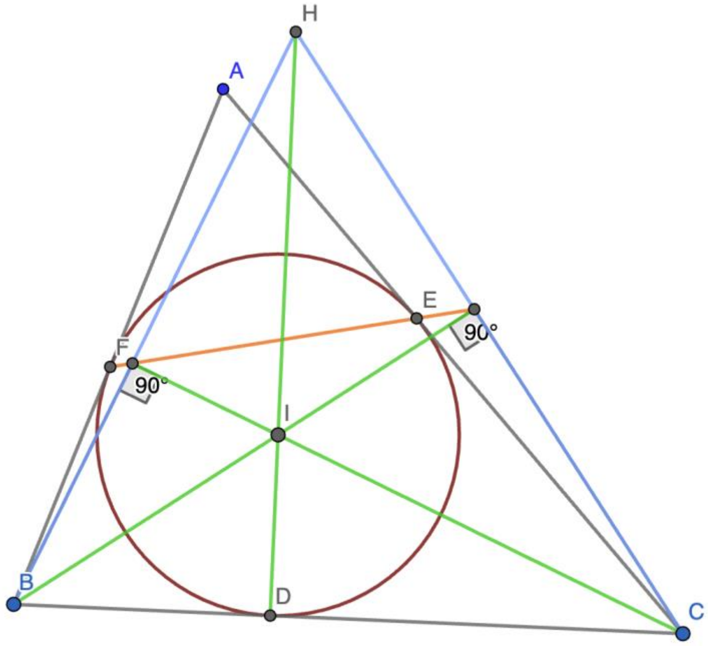
מצ'בה-מנלאוס נקבל ש-$(\mathrm{B}, \mathrm{C}; \mathrm{D}, \mathrm{T}) = -1$, נטיל את הרביעייה דרך $I$ על $EF$ ונקבל ש-$(Q, P; R, T) = -1$ כאשר $R$ היא נקודת החיתוך של $DI$ עם $EF$, לפיכך הדואלי של $T$ ביחס ל-$\Omega$ עובר ב-$R$.

לכן אנחנו צריכים להוכיח ש-$RS$ זה הדואלי של $T$. באופן שקול אנחנו רוצים להוכיח ש-$(D, M; T, RS \cap BC) = -1$. נרצה להטיל את זה דרך $R$. משאלה 6 נקבל ש-$RM$ עובר ב-$A$. לכן נחתוך את הישרים עם $AI$ ונקבל את הרביעייה $(\mathrm{A}, \mathrm{I}; \mathrm{AI} \cap EF, S)$. זו רביעייה הרמונית כי הדואלי של $S$ ביחס למעגל עם קוטר $AI$ הוא $EF$. מש"ל

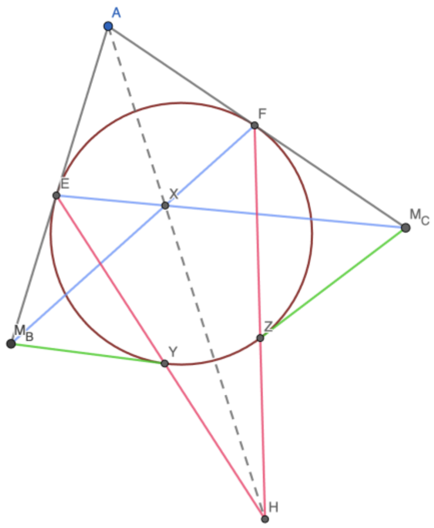


12. נסמן את אמצעי הצלעות במשולש $ABC$ כ-$M_A, M_B, M_C$. נסמן את נק' ההשקה של המעגל החסום ל-$AB, AC$ ב-$E, F$ בהתאמה. נסמן ב-$X$ את החיתוך של $EM_C$ ו-$FM_B$. הוכיחו כי $AX$ עובר במפגש הגבהים של $BIC$.

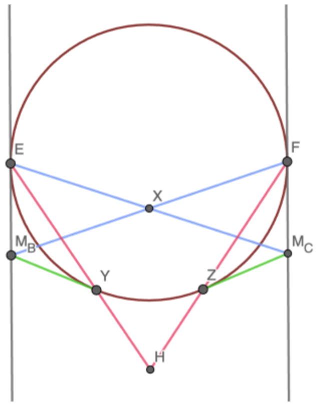
<u>פתרון</u>: הלמה האיראנית אומרת לנו שעקבי הגבהים של $B$ ושל $C$ ב-$BIC$ נמצאים על $EF$. מפגש הגבהים $H$ נמצא על $DI$ ומקיים שהרביעייה $(D, I; DI \cap EF, H)$ היא הרמונית – אפשר לראות את זה למשל מהמעגל עם קוטר $IH$, שבו $DI \cap EF$ דואלית לישר $BC$.




אבל לפי אותו טיעון כמו שאלה 5, נקבל שהדואלי של $M_B$ והדואלי של $M_C$ עוברים ב-$H$. לכן יש לנו ציור כזה:



הדרך הכי קלה לראות שהציור הזה נכון היא לשלוח את $A$ לאינסוף ואת החיתוך של $M_B M_C, EF$ לאינסוף ולהשאיר את המעגל בתור מעגל (זה אפשרי כי אנחנו פשוט שולחים את הישר $A(M_B M_C \cap EF)$ לאינסוף ואת נק' החיתוך עם המעגל ל-$I, J$). אז נקבל ציור סימטרי שבו הטענה טריוויאלית:




<u>הערה</u>: בעצם הוכחנו טענה מגניבה שהדואלי של קטע האמצעים $M_B M_C$ הוא מפגש הגבהים של $BIC$.