ספירה כפולה

1. תהי X קבוצה עם 225 איברים ו-$X_1, \dots, X_{11}$ תתי קבוצות מגודל 45 כך שכל שתיים מהן נחתכות ב-9 איברים בדיוק. הוכיחו כי איחוד הקבוצות הוא מגודל 165 לפחות.

<u>פתרון:</u> נספור שלשות מהצורה (x, X_i, X_j).

נסמן ב-$f(x)$ את כמות הקבוצות שמכילות את x, אז כמות השלשות היא

$$\sum \binom{f(x)}{2}$$

מצד שני אם נספור לפי הזוגות נקבל שכמות השלשות היא

$$9 \cdot \binom{11}{2}$$

נשאר לעשות טיפה חשבון. נסמן את גודל החיתוך של כל הקבוצות ב-y.
מיינסן נקבל ש-

$$\frac{\sum \binom{f(x)}{2}}{y} \geq \binom{\frac{\sum f(x)}{y}}{2} = \binom{\frac{45 \cdot 11}{y}}{2} = \frac{\frac{495}{y} \cdot (\frac{495}{y} - 1)}{2}$$

$$2 \geq \frac{495}{y} - 1$$

$$y \geq 165$$

2. 16 תלמידים נבחנו במבחן אמריקאי (בכל שאלה צריך לבחור אחת מ-4 אופציות אפשריות לתשובה). ידוע שלכל שני תלמידים הייתה לכל היותר שאלה אחת בה הם ענו תשובות זהות. מצאו את כמות השאלות המקסימלית במבחן.

<u>פתרון:</u> נסמן את כמות השאלות המסימלית ב-m.
נספור שלשות (תלמיד 1, תלמיד 2, שאלה שהם מסכימים עליה).

מצד אחד לכל זוג תלמידים יש לכל היותר שאלה אחת ולכן יש לכל היותר $\binom{16}{2}$ שלשות.

מצד שני, לכל שאלה נסמן ב-a_i, b_i, c_i, d_i את כמות התלמידים שענו את התשובה הראשונה, שנייה, שלישית, רביעית בהתאמה. אזי כמות השלשות היא

$$\sum_i \binom{a_i}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c_i}{2} + \binom{d_i}{2} \geq \sum_i 4 \cdot \binom{4}{2} = 24m$$

ולכן $\binom{16}{2} \geq 24m$ כלומר $m \leq 5$.

דוגמה ל-$m = 5$ ישרים במישור אפיני מעל $\mathbb{Z}/4$.

3. תהי A מטריצה 10×10 עם ערכים ממשיים חיוביים. סכום האברים בכל שורה וכל עמודה שווה 1. הוכיחו כי קיימים $j < k, l < m$ כך ש-

$$a_{j,l} \cdot a_{k,m} + a_{j,m} \cdot a_{k,l} \geq \frac{1}{50}$$

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה שזה לא המצב. כלומר בכל מלבן סכום מכפלות המספרים לאורך האלכסונים קטן מ-$\frac{1}{50}$. נספור את סכום כל הערכים בכל המלבנים בשתי דרכים.

דרך המשבצות: כל משבצת מופיעה במלבן עם כל משבצת אחרת מלבד השבצות בשורה והעמודה שלה (שימו לב, אנחנו לא קובעים את כיוון האלכסום שבו המשבצת מופיעה במלבן). נקבל שסכום הערכים בקבל המלבנים הוא

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{i,j}(8 + a_{i,j})$$

החצי מגיע מכך שכל אלכסום נספר פעמיים. $a_{i,j}$ מוכפל ב-$8 + a_{i,j}$ כיוון שסכום הערכים בכל הטבלה הוא 10 וסכום הערכים בשורה והעמודה של $a_{i,j}$ הוא $2 - a_{i,j}$.

מצד שני הסכום דרך המלבנים קטן מ-

$$\binom{10}{2}^2 \cdot \frac{1}{50}$$

זאת מפני שיש $\binom{10}{2}^2$ מלבנים (לבחור שתי שורות ושתי עמודות).

סך הכל קיבלנו ש-

$$81 = 2 \cdot 45^2 \cdot \frac{1}{50} > \sum_{i,j} 8a_{i,j} + a_{i,j}^2 = 80 + \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 80 + \frac{\left(\sum_{i,j} a_{i,j}\right)^2}{100}$$
$$= 81$$

4. מצאו את כל המשפחות $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $[n]$ כך שלכל תת קבוצה לא ריקה $X \subseteq [n]$ בדיוק מחציק מהקבוצות מ-$\mathcal{F}$ נחתכות עם X בכמות זוגית של איברים.

<u>פתרון:</u> לכל זוג קבוצות $A \in \mathcal{F}$ ו-$X \subseteq [n]$ ניתן משקל 1 אם הן נחתכות בכמות זוגית של איברים ו--1 אם הן נחתכות בכמות אי-זוגית של איברים.

נספור את סכום המשקלים הכולל על כל הזוגות.

אם נקבע את A ונבחר איבר $a \in A$ לכל קבוצה X נתאים קבוצה $X' = X \oplus a$ כמובן ש-$\big||X \cap A| - |X' \cap A|\big| = 1$ ולכן הקבוצה A לא תורמת לסכום המשקלים.

נשים לב שהטיעון שלנו לא עובד אם A זו הקבוצה הריקה, במקרה זה היא תורמת 2^n לסכום המשקלים.

סך הכל קיבלנו שסכום המשקלים הוא 0 או 2^n.

עכשיו נספור מהכיוון ההפוך. נקבע את X. אם X זו לא הקבוצה הריקה אז מהנתון נובע שהמשקל שהיא תורמת הוא 0. אם X היא הקבוצה הריקה אז היא תורמת משקל כולל של $|\mathcal{F}|$.

לכן סכום המשקלים הכולל הוא $|\mathcal{F}|$ ונובע ש-$\mathcal{F}$ זה או המשפחה הריקה או קבוצת החזקה של $[n]$.

5. בכל משבצת של דף משבצות אינסופי רשום מספר ממשי. נתונות שתי צורות המורכבות מכמות סופית של משבצות. ניתן להזיז את הצורות במקביל לקווי רשת בכמות שלמה של משבצות. ידוע שסכום המשבצות המכוסות על ידי הצורה הראשונה, ללא תלות במיקום שלה על הדף, יוצא חיובי. הוכיחו כי ניתן למקם את הצורה השנייה על הדף כך שסכום המשבצות המכוסות יהיה חיובי.

<u>פתרון:</u> הרעיון הוא סוג של סכום מינקובסקי.

נמקם את שתי הצורות באופן שרירותי. נסתכל על הזזות של הצורה הראשונה בווקטורים שמתאימים למשבצות של הצורה השנייה. לכל הזזה נחשב את סכום המשבצות המכוסות ונסכום את כל הערכים לכל ההזזות האפשריות.

נשים לב שאם עכשיו נסתכל על ההזזות של הצורה השנייה בווקטורים של הצורה הראשונה אז כל משבצת תכוסה אותה כמות של פעמים כמו מקודם ולכן סכום הערכים הכולל חיובי ובפרט אחת ההזזות תיתן סכום חיובי של משבצות מכוסות.

6. נתון גרף עם 99 קודקודים שכל הדרגות בו בין 81 ל-90. הוכיחו כי יש בגרף 10 קודקודים מדרגה זהה שכולם שכנים של אותו הקודקוד.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה שזה לא המצב. נספור את כמות הזוגות (u, v) כך ש-u מדרגה d. נסמן ב-$f(d)$ את כמות הקודקודים מדרגה d בגרף.

מצד אחד ל-v יש 99 אופציות ולכל אחת מהן יש לכל היותר 9 שכנים מדרגה d ומצד שני ל-u יש $f(d)$ אופציות ולכל אחת מהן יש d אופציות ל-v.נקבל ש-

$$df(d) \leq 99 \cdot 9$$

אם $d = 81$ אז $f(d) \leq 11$, אם $d = 90$ אז $f(d) \leq 9$, בשאר המקרים $f(d) \leq 10$. לכן

$$100 \geq 9 + 11 + 10 \cdot 8 \geq \sum f(d) = 99$$

נסיק שרוב האי-שוויונות שלנו הדוקים (אולי עד כדי אחד). בפרט יש קודקוד מדרגה 90.

נסתכל על הקודקוד מדרגה 90, נניח שהוא מחובר אפילו ל-9 קודקודים מכל דרגה אחרת ולכל שאר הקודקודים מדרגה 90 אז הוא מחובר לכל היותר ל-$9 \cdot 9 + 8 = 89$ קודקודים, סתירה.

7. על שריג משולשי מצויר משולש עם צלע באורך n. פס של המשולש זה השטח בין שני קווי רשת מקבילים וסמוכים. מה היא כמות המשולשים עם צלע באורך 1 המקסימלית שניתן לסמן בתוך המשולש הגדול כך שאף שני משולשים מסומנים לא יופיעו באותו הפס?

<u>פתרון:</u> נסתכל על הקואורדינטות הבריצנטריות של כל המשולשים הקטנים. כלומר לכל משולש נרשום את מספר השורה בה הוא נמצא בכל אחד משולשת הכיוונים (מתחילים לספור מ-1 בפס שליד הצלע). סכום הקואורדינטות של כל משולש הוא $n+1$ או $n+2$ אם הוא מתסכל למטה או למעלה בהתאמה.

אם סימנו x משולשים המקיימים את התנאים אז הסכום הקואורדינטות שלהם הוא לכל היותר $x \cdot (n+2)$ מצד אחד ולפחות $\frac{3x(x+1)}{2} = 3 \cdot (1+\ldots+x)$ מן הצד השני. נסיק ש-

$$x \leq \frac{2n+1}{3}$$

נשאר להראות שמתקיים מקרה שוויון. מספיק לדבר על n-ים שהם 1 מוד 3. נסמן $n = 3k+1$. בשורה התחתונה את המשולש ה-$m+1$ שמסתכל למלעה. נסמן גם את כל המשולשים שמסתכלים למעלה ונמצאים בדיוק מעל למשולש שסימנו. בשורה השנייה מלמטה נסמן את המשולש ה-$2m+1$ שמסתכל למעלה, נסמן גם את כל המשולשים שמסתכלים למעלה ונמצאים בדיוק מעליו. קל לראות שסימנו את כל הכמות הנכונה של משולשים ושהקונפיגורציה עונה על התנאים.

8. ב-IMO כל זוג שאלות נפתר על ידי יותר מ-$\frac{2}{5}$ מהמתחרים ואין אף מתחרה שפתר את כל 6 השאלות. הראו כי יש לפחות 2 מתחרים שפתרו 5 שאלות.

<u>פתרון:</u> נספור שלשות מהצורה (מתחרה, שאלה i, שאלה j) כאשר המתחרה פתר את שתי השאלות.

נסמן ב-d_i את כמות השאלות שהמתחרה ה-i פתר, אזי כמות השלשות היא

$$\sum_i \binom{d_i}{2}$$

מצד שני כיוון שכל זוג שאלות נפתר על ידי יותר מ-$\frac{2}{5}$ נקבל שיש לפחות

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{2n+1}{5} = 6n+3$$

שלשות מהסוג שלנו.

נשים לב שכיוון שאף מתחרה לא פתר את כל השאלות ואם רק מתחרה אחד פתר 5 שאלות אז

$$\sum_i \binom{d_i}{2} \le \binom{5}{2} + (n-1)\cdot\binom{4}{2} = 6n+4$$

וזה הדוק, כלומר חייבים שיהיה מישהו שפתר 5 שאלות ושאר המתחרים פתרו בדיוק 4. יתר על כן, חייב להתקיים ש-$5|2n+1$ (אחרת $6n+3$ יגדל ב-6). נסמן $n=5k+2$ ונקבל שיש לכל היותר זוג שאלות אחד שנפתר על ידי $2k+2$ מתחרים, שאר הזוגות נפתרו על ידי $2k+1$ תלמידים בדיוק. נניח שזוג השאלות $(1,2)$ נפתר על ידי $2k+2$ תלמידים.

נתמקד בשלשות בהן $i>2$ וקבוע. מצד אחד יש $5\cdot(2k+1)$ שלשות כאלו. מצד שני כל תלמיד שפתר את i פתר עוד 3 או 4 שאלות ולכן כמות התלמידים שפתרו עוד 4 שאלות לא תלויה ב-i וכיוון שלא יתכן שהתלמיד שפתר 5 שאלות לא הצליח את כל השאלות עם $i>2$ נובע שהוא הצליח את ארבעת ואחת מבין השאלות 1,2. אבל עכשיו אם נסתכל על השלשות בהן $i=1$ ואז על השלשות בהן $i=2$, נקבל שמצד אחד כמות השלשות אמורה להיות זהה (שווה ל-$10k+6$ בשני המקרים) אבל מצד שני כל תלמיד תורם 3 לכמות השלשות למעט התלמיד שפתר 5 שאלות שתורם 4 לכמות השלשות של אחד מבין $i=1$ או $i=2$ ולכן $10k+6$ לא מסתדר מוד 3 (אמור גם להתחלק ב-3 וגם לתת שארית 1).

9. $n\ge 4$ מתחרים השתתפו בטורניר טניס: כל מתחרה ערך משחק אחד מול כל מתחרה אחר, אף משחק לא נגמר בתיקו. התברר שאין רביעיות מהסוג הבא: שחקן אחד הפסיד לשלושת השחקנים האחרים ברביעיה ושלושתם ניצחו זה את זה במעגל.
נסמן ב-w_i, l_i את כמות הניצחונות וההפסדים של המתחרה ה-i. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i-l_i)^3 \ge 0$$

<u>פתרון:</u> ברור ש-$\sum w_i = \sum l_i$.

נזכיר עובדה מוכרת על טורנירים:

$$\sum_i w_i^2 = \sum_i l_i^2$$

הוכחה: נספור את כמות השלשות שלא יוצרות מעגל. בכל שלשה כזו יש מנצח ומפסיד, אם נספור את כמות השלשות האלו מהמנצח נקבל שיש

$$\sum_i \binom{w_i}{2}$$

שלשות. ואם נספור מהמפסיד נקבל שיש

$$\sum_i \binom{l_i}{2}$$

בגלל שהגורם הלינראי מתכזז נקבל שגם הגורם הריבועי זהה.□

נפתח סוגריים בביטוי בשאלה

$$\sum_{i=1}^{n}\left(w_i^3 - l_i^3\right) + 3\sum_{i=1}^{n} w_i l_i (l_i - w_i) \geq 0$$

נטען ששני המחוברים אי-שליליים.

בשביל המחובר הראשון מספיק להוכיח ש-

$$\sum_i \binom{w_i}{3} \geq \sum_i \binom{l_i}{3}$$

לשם כך נספור את כמות הרבעיות בלי מעגל באורך 3. בכל רבעיה כזו יש מישהו שניצח שלושה משחקים ומישהו שהפסיד שלושה משחקים. יותר מכך, אם ברביעה יש מישהו שהפסיד שלושה משחקים אזי היא רביעה מהסוג שאנו מחפשים, הרי מהנתון ידוע שלא יתכן ששלושת השחקנים יצרו מעגל. מצד שני זה שיש מנצח לא בטיח שאין מעגלים.
לפיכך אם נספור את הרבעיות מהמפסיד נקבל שיש בדיוק

$$\sum_i \binom{l_i}{3}$$

רבעיות מהסוג שלנו. אבל אם נספור מהמנצח נקבל שיש לכל היותר

$$\sum_i \binom{w_i}{3}$$

מהסוג שלנו.

ועכשיו למחובר השני. מספיק להוכיח ש-

$$\sum_i w_i \binom{l_i}{2} \geq \sum_i l_i \binom{w_i}{2}$$

(הוספנו $w_i l_i$ לשני האגפים). לשם כך נספור את כמות הרבעיות ללא תנאים נוספים עליהן. לכל רבעיה נתאים את וקטור הניצחונות שלה, יש שלוש אפשרויות לווקטור הניצחונות: $(2,2,1,1)$, $(3,2,1,0)$, $(3,1,1,1)$. תכנית יש גם את האפשרות של $(2,2,2,0)$ אבל זה אסור מהנתון.

הסוג $(3,1,1,1)$ תומרם 3 לצד שמאל ו-0 לצד ימין.

הסוג $(3,2,1,0)$ תורם 1 לשני האגפים.

הסוג $(2,2,1,1)$ תורם 2 לשני האגפים.

ניצחון.

10. יהיו $A_1, \dots, A_n$ תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$. ידוע שכל הקבוצות הן מגודל 2 לפחות, ולכל תת קבוצה X מגודל 2 של $\{1, \dots, n\}$ קיים i יחיד כך $X \subset A_i$. הוכיחו כי $\left|A_i \cap A_j\right| \neq 0$ לכל $1 \le i < j \le n$.

<u>פתרון:</u> ברור ש-$\left|A_i \cap A_j\right| < 2$ ולכן רוצים להוכיח ש-$\left|A_i \cap A_j\right| = 1$. נסמן ב-$f(a)$ את כמות ה-A-ים שמכילים את a.

נספור את כמות השלשות (a, A_i, A_j) כך ש-$a \in A_i \cap A_j$. אם סופרים את זה מזוגות של A-ים אז אנחנו רוצים להוכיח שיש $\binom{n}{2}$ שלשות כאלו. מצד שני אם סופרים את זה מ-a אז יש $\sum \binom{f(a)}{2}$ כאלו.

אם נספור את כמות הזוגות (a, A_i) כך ש-$a \in A_i$ נקבל ש-$\sum f(a) = \sum |A_i|$ ולכן בעצם מספיק להוכיח ש-

$$\sum_a f(a)^2 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|^2$$

נסתכל על הזוגות (a, A_i) כך ש-$a \notin A_i$ אז כיוון שכל זוג מהצורה (a, b) כאשר $b \in A_i$ מוכל באחד ה-A_j-ים נקבל ש-$f(a) \ge |A_i|$.

ניתן לכל קבוצה משקל ששווה לגודלה עכשיו נפצל את המשקל לאיברים בשתי דרכים שונות.

דרך ראשונה: כל קבוצה תחלק את המשקל שלה שווה בשווה בין האיברים המוכלים בקבוצה. כל איבר יקבל משקל של $f(a)$.

דרך שנייה: כל קבוצה תחלק את משקלה שווה בשווה בין כל האיברים שלא מוכלים בה. כל איבר יקבל משקל של

$$\sum_{i, a \notin A_i} \frac{|A_i|}{n - |A_i|}$$

אבל $|A_i| \le f(a)$ ולכן

$$\frac{|A_i|}{n - |A_i|} \le \frac{f(a)}{n - f(a)}$$

ולכן המשקל של כל איבר הוא לכל היותר

$$\sum_{i,a\notin A_i} \frac{f(a)}{n-f(a)} = f(a)$$

כלומר כל אי-שוויון מהצורה $|A_i| \leq f(a)$ (כאשר $a \notin A_i$) הוא בעצם שוויון.

כעט לכל זוג מהצורה (a, A_i), $a \notin A_i$ ניתן משקל של $f(a) = |A_i|$. נספור את המשקל בשתי דרכים:

מה-a-ים: כל איבר מקבל את המשקל של כל הזוגות בהם הוא משתתף ולכן המשקל של כל איבר הוא $\big(n - f(a)\big) f(a)$.

מה-A_i-ים: כל קבוצה מקבלת את המשקל של כל זוג בה היא משתתפת ולכן המשקל של כל קבוצה הוא $(n - |A_i|)|A_i|$.

אם נסכום את המשקל הכולל של המערכת בשתי הדרכים השונות נקבל ש-

$$n \sum f(a) - \sum f(a)^2 = n \sum |A_i| - \sum |A_i|^2$$

נזכור ש-$n \sum f(a) = n \sum |A_i|$ וננצח.