ספירה כפולה

1. תהי X קבוצה עם 225 איברים ו-$X_1, \dots, X_{11}$ תתי קבוצות מגודל 45 כך שכל שתיים מהן נחתכות ב-9 איברים בדיוק. הוכיחו כי איחוד הקבוצות הוא מגודל 165 לפחות.

2. 16 תלמידים נבחנו במבחן אמריקאי (בכל שאלה צריך לבחור אחת מ-4 אופציות אפשריות לתשובה). ידוע שלכל שני תלמידים הייתה לכל היותר שאלה אחת בה הם ענו תשובות זהות. מצאו את כמות השאלות המקסימלית במבחן.

3. תהי A מטריצה 10×10 עם ערכים ממשיים חיוביים. סכום האברים בכל שורה וכל עמודה שווה 1. הוכיחו כי קיימים $j < k, l < m$ כך ש-

$$a_{j,l} \cdot a_{k,m} + a_{j,m} \cdot a_{k,l} \geq \frac{1}{50}$$

4. מצאו את כל המשפחות $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $[n]$ כך שלכל תת קבוצה לא ריקה $X \subseteq [n]$ בדיוק מחציק מהקבוצות מ-$\mathcal{F}$ נחתכות עם X בכמות זוגית של איברים.

5. בכל משבצת של דף משבצות אינסופי רשום מספר ממשי. נתונות שתי צורות המורכבות מכמות סופית של משבצות. ניתן להזיז את הצורות במקביל לקווי רשת בכמות שלמה של משבצות. ידוע שסכום המשבצות המכוסות על ידי הצורה הראשונה, ללא תלות במיקום שלה על הדף, יוצא חיובי. הוכיחו כי ניתן למקם את הצורה השנייה על הדף כך שסכום המשבצות המכוסות יהיה חיובי.

6. נתון גרף עם 99 קודקודים שכל הדרגות בו בין 81 ל-90. הוכיחו כי יש בגרף 10 קודקודים מדרגה זהה שכולם שכנים של אותו הקודקוד.

7. על שריג משולשי מצויר משולש עם צלע באורך n. פס של המשולש זה השטח בין שני קווי רשת מקבילים וסמוכים. מה היא כמות המשולשים עם צלע באורך 1 המקסימלית שניתן לסמן בתוך המשולש הגדול כך שאף שני משולשים מסומנים לא יופיעו באותו הפס?

8. ב-IMO כל זוג שאלות נפתר על ידי יותר מ-$\frac{2}{5}$ מהמתחרים ואין אף מתחרה שפתר את כל 6 השאלות. הראו כי יש לפחות 2 מתחרים שפתרו 5 שאלות.

9. $n \geq 4$ מתחרים השתתפו בטורניר טניס: כל מתחרה ערך משחק אחד מול כל מתחרה אחר, אף משחק לא נגמר בתיקו. התברר שאין רביעיות מהסוג הבא: שחקן אחד הפסיד לשלושת השחקנים האחרים ברבעיה ושלושתם ניצחו זה את זה במעגל.
נסמן ב-w_i, l_i את כמות הניצחונות וההפסדים של המתחרה ה-i. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - l_i)^3 \geq 0$$

10. יהיו $A_1, \dots, A_n$ תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$. ידוע שכל הקבוצות הן מגודל 2 לפחות, ולכל תת קבוצה X מגודל 2 של $\{1, \dots, n\}$ קיים i יחיד כך $X \subset A_i$. הוכיחו כי $\left|A_i \cap A_j\right| \neq 0$ לכל $1 \leq i < j \leq n$.

בתאבון!