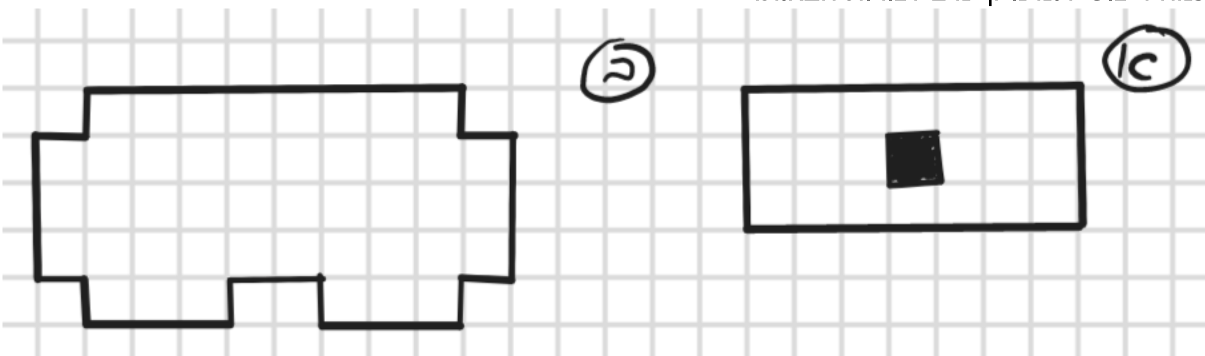
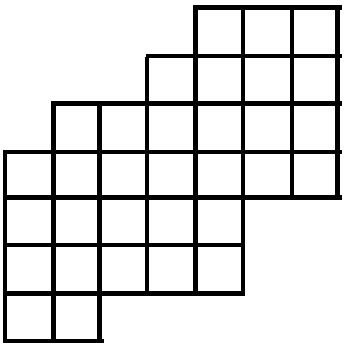
ריצופי דומינו

-חלק 1: חשבון וזוגיות-

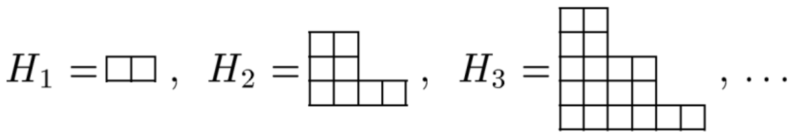
1. כמה ריצופי דומינו קיימים לצורות הבאות:



2. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף מלבן $3 \times 2n$ היא מספר   א. אי-זוגי   ב. מהצורה $a^2 + 2b^2$.
3. נסמן ב-$N(m,n)$ את כמות ריצופי הדומינו של מלבן $m \times n$. מצאו נוסחת נסיגה עבור:
   א. $N(2,n)$ ב. $N(3,n)$ ג.* $N(4,n)$
4. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף את הצורה הבאה היא:
   א. זוגית   ב. מתחלקת ב-4   ג.* מתחלקת ב-8



5. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף את הצורות הבאות היא אי-זוגית:



6. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף מלבנים הבאים היא אי-זוגית:
   א. 100×7 ב. 1000×1023
7. נתון מצולע (ללא חורים). הוכיחו כי אם ניתן לרצף אותו על ידי דומינו אז יש בו צלע באורך זוגי.
8. הוכיחו כי לכל n טבעי קיימת צורה שיש לה בדיוק n ריצופי דומינו.
9. הוכיחו כי קיימים קבועים ממשיים $C_1, C_2 > 0$ עבורם $C_1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{mn} < N(m,n) < C_2 \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^{mn}$ לכל $m,n > 0$ מספיק גדולים עבורם $2|mn$. (בשאלה זו מותר להשתמש במחשבון)
10. מצאו הוכחה קומבינטורית לנוסחה הבאה: $f_{2n+3}f_{2n-1} = (f_{2n+1})^2 + 1$ והכלילו אותה עבור $f_{n-k}f_{n+k}$.
11. * הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף צורה P באמצעות דומינו היא זוגית, אם ורק אם ניתן לסמן קבוצה לא ריקה של המשבצות של הצורה, כך שלכל משבצת של הצורה יהיו כמות זוגית של שכנים מסומנים.

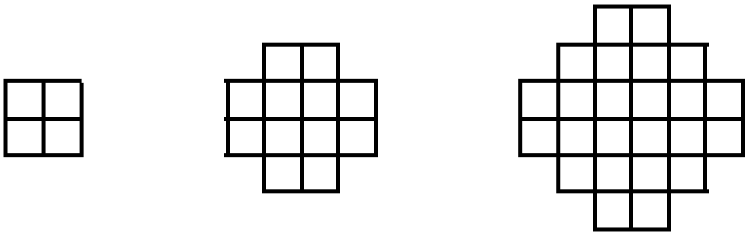
-חלק 2: פליפים-

טענה 1: בכל מלבן $m \times n$ עם $n,m > 1$ שמרוצף על ידי דומינו יש ריבוע 2×2 שמרוצף על ידי זוג דומינו.

הערה: הטענה נכונה עבור כל צורה פשוטת-קשר בעלת שני ריצופי דומינו שונים.

טענה 2: בכל ריבוע שמרוצף על ידי דומינו יש ריבוע 2×2 שמרוצף על ידי זוג דומינו על האלכסון הראשי.

הגדרה: יהלום בגודל n זו צורה המורכבת מכל המשבצות שפוגשות ריבוע אם צלע $\sqrt{2} \cdot n$ שקודקודיו בצמתי הרשת. דוגמאות עבור $n = 1,2,3$:



12. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף ריבוע $n \times n$ מתחלקת ב-4 לכל $n > 2$.
13. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף יהלום מגודל n מתחלקת ב-2^n.
14. הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף מלבן $n \times (n+1)$ היא אי-זוגית.

בתאבון!

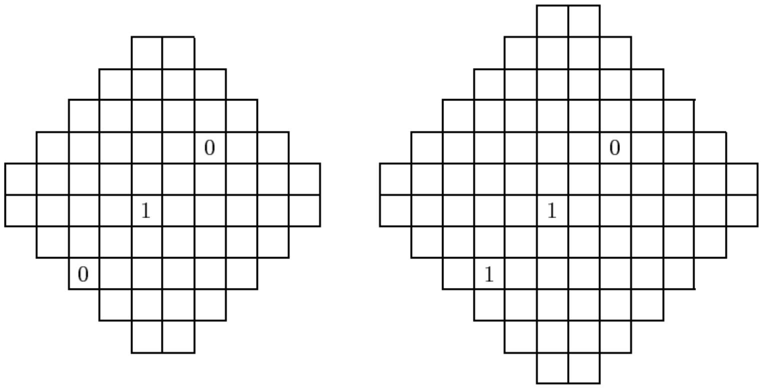
ריצופי דומינו

- חלק 3: שרשראות –

טענה 3: איחוד שני זיווגים מושלמים בגרף דו-צדדי מורכב ממעגלים וקשתות בודדות.

הערה: ריצוף דומינו הוא זיווג מושלם בים משבצות שחורות ללבנות בצביעת שח.

15. על צלע של ריבוע 1993×1993 מסומנות שתי משבצות A, B בעלות צבע זהה בצביעת שח. הוכיחו כי כמות ריצופי דומינו של הריבוע ללא משבצת A שווה לכמות ריצופי דומינו של הריבוע ללא B.
16. נסמן ב-d את כמות ריצופי הדומינו של מלבן 200×100. נסמן ב-d_2 את כמות הריצופים של המלבן ללא שתי משבצות פינתיות התחתונות, וב-$\widetilde{d_2}$ את כמות הריצופים של המלבן ללא שתי משבצות פינתיות השמאליות. נסמן ב-d_4 את כמות ריצופי הדומינו של המלבן ללא כל 4 המשבצות הפינתיות. הוכיחו כי $d \cdot d_4 = (d_2)^2 + \left(\widetilde{d_2}\right)^2$.
17. נתון מלבן $2m \times 2n$ מרוצף על ידי דומינו. שמים כלי משחק על משבצת שסמוכה לצלע שמאלית. מזיזים את הכלי לסירוגין, פעם בתוך דומינו של הריצוף, פעם ימינה. הוכיחו כי הכלי יצא מהלוח באותה שורה ממנה הוא התחיל.
18. נסמן ב-T_n את כמות הדרכים לרצף יהלום בגודל n באמצעות דומינו. הוכיחו כי $T_{n+1}T_{n-1} = 2T_n^2$, ומצאו נוסחה סגורה עבור T_n.
19. מלך צולע הוא כלי שח שיכול לזוז רק משבצת אחת ימינה, למטה או ימינה-למטה באלכסון. נתון לוח $(n+1) \times (n+1)$ ללא משבצת שמאלית תחתונה. בעמודה השמאלית ביותר עומדים n מלכים צולעים. בכמה דרכים כל המלכים יכולים להגיע לשורה התחתונה של הלוח במסלולים לא נחתכים?
20. נסמן את המשבצות האי-זוגיות על האלכסון האמצעי של יהלום, ונכתוב בכל משבצת 1 או 0:



נגיד שריצוף תואם לסימון, אם בכל משבצת בה רשום 1 הדומינו מכוון למעלה או שמעלה, ובכל משבצת בה רשום 0 הדומינו מכוון ימינה או למטה. הוכיחו כי כמות הריצופים שתואמים לסימון מסוים זהה לכל סימון.

21. א. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של ריבוע $2n \times 2n$ מתחלקת ב-2^n.
    ב. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של ריבוע $2n \times 2n$ הוא מספר מהצורה $2^n(2k+1)^2$.

-חלק 4: תבניות –

הגדרה: ריבוע $(n+1) \times (n+1)$ שממנו הורידו קבוצת משבצות מהשורה העליונה ומהעמודה הימנית יקרא ***n*-תבנית**.

הגדרה: n-תבנית שממנה הורידו את הפינה $(n+1, n+1)$ והורידו בדיוק משבצת אחת מכל זוג $(i, n+1), (n+1, i)$ תקרא ***n*-תבנית מאוזנת**.

טענה 4: *כמות הדרכים לרצף n-תבנית על ידי דומינו היא אי-זוגית אם ורק אם התבנית מאוזנת.*

22. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של מלבן $n \times (2n+1)$ מתחלקת ב-4.
23. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של ריבוע $(2n+1) \times (2n+1)$ ללא משבצת מרכזית מתחלקת ב-4.
24. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של מלבן $n \times 2n$ משאירה שארית 1 בחלוקה ב-4.
25. א. הוכיחו כי כמות ריצופי הדומינו של מלבן $m \times n$ היא אי-זוגית אם ורק אם $m+1, n+1$ זרים.
    ב. יהי $\gcd(2n+1, 2m+1) = 2k+1$. נסמן ב-N את כמות ריצופי הדומינו של מלבן $2n \times 2m$. הוכיחו כי $2^k | N$, $2^{k+1} \nmid N$.

בתאבון!