Δ

1. יהי $P(x) = x^2 + ax + b$ עבור a, b ממשיים. האם יתכן שב-10 נקודות שלמות עוקבות הפולינום יקבל חזקות של 2?

2. מצאו את כל הקבוצות $\{a_1, \dots, a_n\}$ של שלמים חיוביים עבורן
$$a_1 \cdot \dots \cdot a_n | (m + a_1) \cdot \dots \cdot (m + a_n)$$
לכל m שלם.

3. הראו כי לכל n שלם חיובי, קיימים $a_1, \dots, a_k$ שלמים כך ש-$n = a_1^{33} + \dots + a_k^{33}$ ו-$k \le 2^{200}$.

4. יהא P פולינום ממעלה d. נניח ש-P מקבל ערכים שלמים בכל הנקודות השלמות ושלכל n שלם, $P(n)$ זוגי אם ורק אם $n|1024$. מצאו את ה-d המינימלי עבורו זה אפשרי, או הוכיחו שלא קיים כזה.

5. נתון $a \ge 3$ ממשי ופולינום $P(x)$ ממעלה n שמקדמיו ממשיים. הוכיחו כי: $\max_{0 \le i \le n+1} |a^i - P(i)| \ge 1$.

6. נתון פולינום $P(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_o$ שמקדמיו ממשיים. הוכיחו כי קיים $i \in \{1,2, \dots, n\}$ עבורו
$$|P(i)| \ge \frac{n!}{\binom{n}{i}}.$$

7. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה שמקיימת $f(0) = 0, f(1) = 1$ ו-$f(x) \ge 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי קיים שלם חיובי n וממשי x כך ש-$f^{(n)}(x) < 0$.

8. יהי p ראשוני. סדרה $a_1, a_2, \ldots$ של מספרים שלמים תקרא יפה אם לכל שלם אי-שלילי e, קיים N כך שלכל $m \geq N$ מתקיים:

$$p^e \mid \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} a_k .$$

הוכיחו כי אם $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרות יפות אז גם $\{a_n b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ יפה.

9. מצאו את כל הטבעיים n, עבורם קיימת פונקציה $g: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, כך שהפונקציות הבאות חח"ע ועל:

$$g(x), \quad g(x)+x, \quad g(x)+2x, \ldots, \quad g(x)+100x .$$

10. תהי $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת ש-$f(0,0) = 1$ ולכל $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ מתקיים:

$$f(x,y) = f(x+1,y) + f(x,y+1) .$$

הוכיחו כי $f(x,0)^2 \leq f(2x,0)$ לכל $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

11. נתון מספר ממשי c וקבוצה של מספרים שלמים חיוביים X. ידוע ש-n^c שלם, לכל $n \in X$. הוכיחו כי c שלם כאשר:

א. $X = \mathbb{N}$.

ב. לכל m שלם, לפחות אחוז מהמספרים $1, \ldots, m$ נמצאים ב-X.

12. יהי $n \geq 2$ שלם ו-m שלם חיובי זוגי. יהי $f(x_1, \ldots, x_n)$ פולינום עם מקדמים ממשיים עבורו לכל $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ מתקיים:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left\lfloor \frac{x_1 + \cdots + x_n}{m} \right\rfloor .$$

הוכיחו כי המעלה של f היא לפחות $n(m-1)$.