נוסחת דריכלה

1 המשפט

אם $p > 3$ ראשוני ומקיים $p \equiv 3 (\bmod 4)$ אז מתקיים $\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} (\frac{r}{p}) > 0$.
תחילה נוכיח כי

$$\frac{1}{2-(\frac{2}{p})} \sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} (\frac{r}{p}) = -\frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} r(\frac{r}{p}) \tag{1}$$

אחרי זה נוכיח כי $A = -\frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} r(\frac{r}{p})$ חיובי.

2 תבניות ריבועיות

נחשוב על תבניות ריבועיות מהצורה

$$Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{2}$$

כאשר $b^2 - 4ac = -p$ ובנוסף $a > 0$.
אנחנו נוכיח ש A שווה לכמות התבניות האלו, כאשר התבנית Q והתבנית $Q(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ נחשבות שקולות אם $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. נסמן את כמות מחלקות השקילות ב־h.
אנו נוכיח ש

$$h = -\frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} r(\frac{r}{p}) \tag{3}$$

3 שלבים בהוכחה

3.1 שלב ראשון, בכמה דרכים אפשר להציג מספר עם תבניות ריבועיות?

ניקח מספר $N > 0$ ונשאל בכמה דרכים אפשר להציג אותו באמצעות תבנית כלשהי מהסוג שדיברנו עליו.
נוכיח שהתשובה היא:

$$2 \sum_{d|N} (\frac{-p}{d}) \tag{4}$$

3.2 שלב שני, רמאות

כעת, נרצה לקחת את השלב הראשון ולהציב $N = 0$, h היא כמות הדרכים להציג את 0.
צריך לתת משמעות ל

$$2 \sum_{d=1}^{\infty} (\frac{-p}{d}) = 2 \sum_{d=1}^{\infty} (\frac{d}{p}) \tag{5}$$

.

סכום צ'זרו של הסדרה $(\frac{d}{p})$ הוא בדיוק A.

3.3 שלב שלישי, הופכים את השלב השני לפורמלי ומאבדים פקטור 2

ניקח פונקציה חלקה η שמקיימת $\eta(0)=1$ ושהיא וכל הנגזרות שלה שואפות מהר מאוד לאפס.
לדוגמה $\eta(x)=e^{-x}$.

טענה: אם (a_n) סדרה מחזורית עם ממוצע אפס אז $lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\eta(\delta n)a_n$ שווה לסכום צ'זרו.

נסמן ב $S(N)$ את כמות הדרכים לייצג את N בעזרת תבניות ריבועיות.
נחשב בשתי דרכים שונות את

$$L_\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\eta(\delta n)S(n) \tag{6}$$

3.3.1 חישוב ראשון, תבניות ריבועיות

נשתמש בהגדרה של $S(n)$ על מנת להראות שמתקיים

$$L_\delta=\frac{2h\pi}{\delta\sqrt{p}}\int_0^\infty \eta(r)dr+O(\delta) \tag{7}$$

3.3.2 חישוב שני, נשתמש בשלב הראשון

נכתוב

$$L_\delta=S(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\eta(\delta n)S(n)=S(0)+2\sum_{n=1}^{\infty}\eta(\delta n)\sum_{m|n}(\frac{-p}{m}) \tag{8}$$

נשתמש בקירוב:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta(k\delta)=-\frac{\eta(0)}{2}+\frac{1}{\delta}\int_0^\infty \eta(r)dr+O(\delta) \tag{9}$$

נסמן:

$$\theta(\delta)=\frac{2}{x}\int_0^\infty \eta(r)dr-2\sum_{k=1}^{\infty}\eta(k\delta) \tag{10}$$

$$L_\delta=S(0)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\delta}(\frac{-p}{m})\int_0^\infty \eta(r)dr-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(\frac{-p}{m})\theta(m\delta) \tag{11}$$

3.3.3 סיום

נשווה את המקדם של $\frac{1}{\delta}$ ונקבל

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}(\frac{m}{p})=\frac{2h\pi}{\sqrt{p}} \tag{12}$$

נחסר את הגורם שמתבדר, נחשב את הגבול ב־0 ונקבל:

$$h=S(0)=lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\theta(\delta n)(\frac{m}{p})=-\frac{1}{p}\sum_{r=1}^{p}r(\frac{r}{p}) \tag{13}$$