איך פותרים משוואות דיופנטיות

אין שיטה כללית לפתירת משוואות דיופנטיות ובטבע קיימות משוואות שקשה מאוד לפתור, (למשל המשפט האחרון של פרמה $a^n + b^n = c^n$). אבל יש כמה רעיונות שחוזרים על עצמם בפתרונות של משוואות דיופנטיות ברמה של אולימפיאדה, ושווה לחשוב עליהם כאשר מנסים לפתור משוואה.

1. **להסתכל מודולו מספרים קטנים:** להסתכל על המשוואה מודולו ... ,2,3,4,5,7. זה כנראה יהפוך את המשוואה לפשוטה יותר ואולי יאפס חלק מהמחוברים.
2. **להסתכל מודולו דברים שקשורים למשתנים שמופיעים במשוואה:** אם המשוואה היא פולינום ומופיע בה x אז כדאי להסתכל עליה מודולו $x, x+1, x-1$ או ביטוי דומה במטרה להפוך את המשוואה לפשוטה יותר. לפעמים נוח יותר להסתכל מודולו מספר ראשוני שמחלק את אחד מבין $x, x+1, x-1$. רעיון נוסף הוא שאם מופיעים במשוואה x, y אז להסתכל עליה מודולו $x-y$.
3. **לפרק לגורמים:** כדאי לנסות לפרק את אגפי המשוואה לגורמים, או להעביר אגפים ככה שאחד מהם יתפרק לגורמים. גם עוזר אם הגורמים שפירקנו אליהם זרים, למשל אם באגף אחד יש ריבוע ובשני משהו שהתפרק לגורמים זרים אז כל אחד מהגורמים האלו הוא גם ריבוע.
4. **החלפות משתנים:** כדאי לעבור למשתנים בהם המשוואה היא כמה שיותר פשוטה. צריך לזכור שבמשתנים החדשים יכולה להופיע משוואה נוספת. למשל אם רוצים לעבור מהמשתנים a, b למשתנים חדשים $x = a + b, y = ab$ אז תופיע עוד משוואה, $x^2 - 4y$ ריבוע שלם.
5. **נוסחת השורשים:** אם המשוואה היא משוואה ריבועית באחד המשתנים, כלומר מהצורה $x^2 + px + q = 0$ כאשר p, q תלויים איכשהו בשאר המשתנים. אז מספיק לפתור את המשוואה $p^2 - 4q = k^2$ ואז נקבל כי $x = \frac{-p \pm k}{2}$.
6. **שיטת הירידה:** להתחיל מפתרון אחד של המשוואה ולבנות פתרון חדש שהוא קטן יותר במובן כלשהו (בסכום, במכפלה, במשתנה הגדול ביותר מבין כל המשתנים). אם תמיד מצליחים לבנות פתרון קטן יותר אבל כל הפתרונות עדיין חיובים אז זה אומר שאין פתרון למשוואה. אם הבנייה עובדת "כמעט תמיד" אפשר להסתכל מתי היא מפסיקה לעבוד ולהבין את הפתרונות שעבורם היא לא עובדת ואז שאר הפתרונות מתקבלים מפתרונות אלה באמצעות להפוך את הבנייה.
7. **משפט אוילר:** אם למשל במשוואה מופיעות הרבה חזקות שישיות (x^6) אז כדאי להסתכל על המשוואה מודולו 7 ומודולו 9.
8. **משוואות דיופנטיות מוכרות:** לנסות להביא את המשוואה למקרה פרטי של משוואה שאתם יודעים לפתור, כמו למשל $a^2 + b^2 = c^2$ או משוואת פל $x^2 - dy^2 = 1$. כמובן שכדי להגיע למצב שבו אתם טובים בלעשות את זה, צריך לפתור ולהכיר הרבה משוואות דיופנטיות.
9. **מספרים ראשוניים:** לקחת מספר ראשוני שמחלק את אחד מאגפי המשוואה ולראות מה אפשר להבין עליו. זה עובד טוב במשוואות מהצורה $f(a,b) | g(a,b)$ ואז לוקחים מספר ראשוני שמחלק את $f(a,b)$. רעיון נוסף הוא לספור כמה פעמים מספר ראשוני מחלק כל אחד מאגפי המשוואה. עקרון נוסף הוא שאנחנו לא מכירים דרך טובה לייצר מספרים ראשוניים ולכן אם בשאלה שואלים האם מספר הוא ראשוני או מבקשים למצוא את כל הערכים עבורם הביטוי הוא ראשוני אז התשובה תהיה שקיימים מעט ערכים כאלה.
10. **לחפש פתרונות קטנים:** זה בעיקר עוזר להבין מה אתם רוצים להוכיח. האם רוצים להוכיח שאין פתרונות, או שיש פתרון יחיד, או שיש הרבה פתרונות ורוצים לאפיין את כולם. דבר שחשוב לשים לב אליו, אם מצאתם לפחות פתרון אחד אז לא תוכלו להוכיח שאין עוד פתרונות רק מלהסתכל מדולו מספרים.
11. **אי-שוויונים:** להשתמש באי-שוויונים אלגבריים כדי להוכיח שביטוי מסויים במשוואה יכול לקבל רק קבוצה מסוימת של ערכים, למשל אם המשוואה היא $a^2 + b^2 = ab + 3$ אז מאי-שוויון הממוצעים נקבל כי $ab \leq 3$. ולכן אם פותרים את המשוואה בטבעיים נקבל $ab = 1,2,3$.