0פר1ת

בתרגיל זה כל המספרים הם שלמים חיוביים
וכל הספרות הן בייצוג עשרוני אם לא נאמר אחרת

0. הוכיחו שלכל N מתקיים $S(8N) \geq \frac{1}{8}S(N)$, כאשר $S(n)$ הוא סכום הספרות של n.

1. נסמן ב-$r(n)$ את המספר המתקבל מ-n לאחר היפוך סדר הספרות שלו. למשל, $r(239) = 932$ ו-$r(4500) = 54$. מצאו את כל המספרים k בעלי התכונה: אם k מחלק את n, אז הוא בהכרח מחלק גם את $r(n)$.

2. המספר N הוא פלינדרום ברישום בבסיסים 2, 3, ו-9. האם יתכן שיותר ממחצית מהספרות שלו בבסיס 3 הן 2?

3. מבין כל המספרים ה-100 ספרתיים, מה יש יותר: כאלה שמקיימים $S(N) < S(2N)$, או כאלה שמקיימים $S(N) > S(2N)$?

4. כמה מספרים קטנים ממיליון ישנם אשר מתחלקים ב-7, ולא מכילים אף ספרה מלבד 0, 1 ו-9?

5. הוכיחו שקיימים אינסוף ערכים של m עבורם $S(b^m) \geq S(b^{m+1})$

א. עבור $b = 3$. ב. עבור $b = 2$.

6. הוכיחו שקיים קבוע $a > 0$ עבורו $a^{S(2^m)} > m$ לכל m.

7. איילה וברווז משחקים משחק. בהתחלה איילה בוחרת מספר סודי A. בכל מהלך לאחר מכן, ברווז בוחר מספר B ואומר אותו לאיילה, והיא אומרת לו את ממוצע הספרות של $A \cdot B$. המטרה של ברווז היא שאיילה תגיד לו מספר הקטן מ-5. לאילו ערכי N ברווז יכול בהכרח להשיג את מטרתו בלכל היותר N מהלכים?

8. למספר N יש בדיוק D מחלקים. סכומי הספרות שלהם הם $1,2,3,\ldots,D$ בסדר כלשהו. האם יתכן כי N פריק?

9. גמל בחר N שאינו מתחלק ב-10, וסיפר לדורבן את סכומי הספרות של kN לכל k. האם דורבן בהכרח יוכל לקבוע ביחידות מהו N? (למען הסר ספק, לוטרות מסוגלות להקריא ולשמוע אינסוף מספרים בזמן סופי)

A. נסמן ב-$o(n)$ את כמות הספרות האי-זוגיות של n. למשל, $o(65536) = 3$. חשבו את הסכום האינסופי

$$\frac{o(2)}{2} + \frac{o(4)}{4} + \frac{o(8)}{8} + \frac{o(16)}{16} + \frac{o(32)}{32} + \frac{o(64)}{64} + \cdots$$

בתיאבון!