

# אינוולוציה של דזארג

**משפט 1 (אינוולוציה של דזארג):** נתונות נקודות  $A, B, C, D$  (אף 3 לא על ישר) וישר  $l$  שלא עובר דרך אף אחת מהן. בהינתן נקודה  $X$  על  $l$ , נקודה  $f(X)$  מוגדרת להיות החיתוך השני של השניונית  $ABCDX$  עם  $l$ . אזי ההעתקה  $f$  הינה אינוולוציה פרויקטיבית (אינוולוציה -  $(f(f(X))) = X$ ). בנוסף, אם  $AB \cap l = T, CD \cap l = S$  מחליפה בין  $T$  ל- $S$ .

**משפט 2 (אינוולוציה דואלית):** נתונים ישרים  $l_1, l_2, l_3, l_4$  (אף 3 לא נפגשים בנקודה) ונקודה  $P$  שלא נמצאת על אף אחד מהם. בהינתן ישר  $l$  דרך  $P$ ,  $g(l)$  מוגדרת להיות המשיק השני מ- $P$  לשניונית שמשיקה לישרים  $l_1, l_2, l_3, l_4, l$ . אזי ההעתקה  $g$  הינה אינוולוציה פרויקטיבית על ישרים דרך  $P$ . בנוסף, אם  $l_1 \cap l_2 = U, l_3 \cap l_4 = V$  אז  $g$  מחליפה בין הישרים  $PU, PV$ . **הערה:** ייתכנו ניוונים כגון שתי נקודות שמתלכדות במשפט 1 או שני ישרים שמתלכדים במשפט 2. נסו להבין מה המשפטים אומרים במקרים אלו.

**דוגמא (למת ההצמדה):** נתונה זווית  $\angle BAC$  ונקודות  $P, Q$  כך ש- $\angle BAP = \angle QAC$ . החיתוך של  $BP, CQ$  יסומן  $X$ , והחיתוך של  $BQ, CP$  יסומן  $Y$ . אזי  $\angle BAX = \angle YAC$ .

**משפט 3:** נתון ישר  $l$  ואינוולוציה פרויקטיבית  $f$  עליו. אזי האינוולוציה הינה אינוורסיה או שיקוף ביחס לנקודה על  $l$  (האינוורסיה יכולה להיות שלילית).

1. נתון מרובע  $ABCD$ . החיתוך של  $AB$  עם  $CD$  יסומן ב- $E$  והחיתוך של  $AD$  עם  $BC$  יסומן ב- $F$ . הוכיחו כי למעגלים עם קטרים  $AC, BD, EF$  יש שתי נקודות משותפות.

2. במרובע חסום  $ABCD$ , האלכסונים  $AC, BD$  נחתכים ב- $E$ . מעגל שמשיק לקטעים  $BE, CE$  בנקודות  $M, N$  בהתאמה חותך את המעגל החוסם של  $ABCD$  בנקודות  $P, Q$ . הישר  $MN$  חותך את  $BC, AD$  ב- $X, Y$  בהתאמה. הוכיחו כי  $PQXY$  חסום במעגל.

3. מרובע  $ABCD$  חוסם מעגל שמרכזו  $I$ . נקודה  $P$  מחוץ למרובע מקיימת שלזוויות  $\angle APC, BPD$  יש חוצה זווית משותף. הוכיחו כי חוצה הזווית הזו עובר דרך  $I$ .

4. בתוך זווית  $\angle BAC$  נבחרו נקודות  $P, Q$  כך ש-  $\angle BAP = \angle QAC$ . עקבי האנכים מ-  $P, Q$  לישרים  $AB, AC$  יסומנו  $D, E$  בהתאמה. האנכים מ-  $P, Q$  לישרים  $AB, AC$  נחתכים ב-  $U$ . ישרים  $DP, QE$  נחתכים ב-  $V$ . הוכיחו כי  $AUV$  ישר.

5. במשולש  $ABC$  המשיקים המשותפים של המעגל החוסם והמעגל החסום מבחוץ מול  $A$  נחתכים עם  $BC$  בנקודות  $P, Q$ . הוכיחו כי  $\angle PAB = \angle CAQ$ .

6. במרובע  $ABCD$  המעגלים החסומים במשולשים  $ACD, BCD$  יסומנו  $\omega_1, \omega_2$  בהתאמה, ומרכזיהם יסומנו  $O_1, O_2$ . המשיק המשותף החיצוני של  $\omega_1, \omega_2$  ששונה מ-  $CD$  משיק למעגלים בנקודות  $K, L$  בהתאמה. הוכיחו כי  $AK, BL$  נחתכים על  $O_1O_2$ .

7. במשולש  $ABC$ ,  $AD$  הוא חוצה הזווית של  $\angle BAC$ . על המעגל  $BAD$  נבחרה נקודה  $P$  ועל המעגל  $CAD$  נבחרה נקודה  $Q$  כך ש-  $P, Q$  נמצאות מצדדים שונים של הישר  $AD$  ושהמשיק ל-  $BAD$  ב-  $P$  והמשיק ל-  $CAD$  ב-  $Q$  נפגשים על  $AD$ . הישרים  $CP, BQ$  נפגשים בנקודה  $K$ . הישר שעובר דרך  $K$  ומקביל ל-  $BC$  חותך את הישרים  $DP, DQ, DA$  בנקודות  $X, Y, Z$  בהתאמה. הוכיחו כי  $XK = ZY$ .

8. במשולש  $ABC$  המשיקים מ-  $B, C$  למעגל החוסם נפגשים ב-  $P$ . חוצה הזווית החיצוני מ-  $A$  חותך את  $BC$  בנקודה  $X$ . נקודות  $Y, Z$  נבחרו על  $BP, CP$  בהתאמה כך ש-  $XYZ$  ישר. מעגלים  $ABY, ACZ$  נחתכים שנית ב-  $N$ . הוכיחו כי הישר  $NP$  חוצה את זווית  $\angle YNZ$ .

9. יהיו נקודות  $A, B, C, D, E, F$  על אליפסה שאינה מעגל. נתון שלמשולשים  $ABC, DEF$  מפגש גבהים משותף  $H$ . הוכיחו כי  $H$  נמצא על הציר הרדיקלי של המעגלים החוסמים של  $ABC, DEF$ .

10. נתונות נקודות  $A, B, C$  על ישר  $l$  בסדר זה. מעגלים  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  משיקים ל-  $l$  בנקודות  $A, B, C$  בהתאמה וגם  $\omega_1, \omega_3$  משיקים ל-  $\omega_2$ . המשיק החיצוני המשותף של  $\omega_1, \omega_3$  שאינו  $AC$  חותך את  $\omega_2$  בנקודות  $X, Y$ . הנקודה הנגדית ל-  $B$  על  $\omega_2$  תסומן  $Z$ . הוכיחו כי המעגל עם קוטר  $AC$  משיק לישרים  $XZ, YZ$ .

11. נתון מרובע  $ABCD$  ונקודות  $P, Q, R, S$  על הצלעות  $AB, BC, CD, DA$  החיתוך של  $PR, QS$  יסומן ב-  $O$ . נתון כי המרובעים  $APOS, BQOP, CROQ, DSOR$  הוכיחו כי הישרים  $PQ, RS$  נחתכים על  $AC$ .