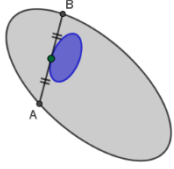


נגזרות גיאומטריות

1. נתון משולש. מצאו את הישר עבורו סכום המרחקים מקודקודי המשולש לישר זה יהיה קטן ככל האפשר.

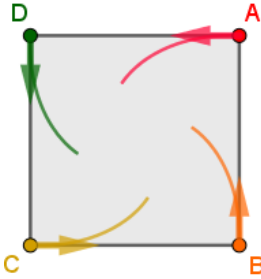


2. א. בתוך צורה קמורה מישורית K נמצאת צורה קמורה מישורית Q שלא נוגעת בשפה של K. הראו שקיימות לפחות שתי דרכים לבחור זוג נקודות A, B על השפה של K כך ש-Q נמצא בצד אחד של AB, אבל האמצע של AB שייך ל-Q (להחליף בין A ל-B זו אותה בחירה).

ב. כיצד להכליל את סעיף א' למקרה תלת-ממדי?

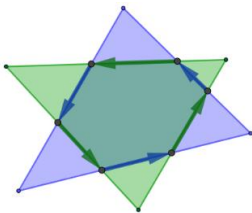
3. בתוך מצולע $A_1A_2\dots A_n$ יש נקודה O כך ש- $\angle A_nOA_1 = \angle A_1OA_2 = \dots = \angle A_{n-1}OA_n$. הראו כי לכל נקודה $X \neq O$ מתקיים:

$$A_1X + A_2X + \dots + A_nX > A_1O + A_2O + \dots + A_nO.$$



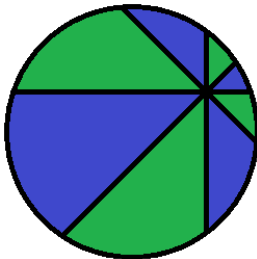
4. בפינות של ריבוע שאורך הצלע שלו L נמצאות 4 לטרות נקודתיות: איילה, ברווז, ג'ירפה, ודורבן. ברגע מסוים, ארבעתן מתחילות ללכת במהירות 1: איילה בכל רגע הולכת אל דורבן, ברווז הולך אל איילה, ג'ירפה הולכת אל ברווז, ודורבן הולך אל ג'ירפה, עד שיפגשו. מה המרחק שכל לטרה תעבור עד לרגע המפגש?

5. גבול של שולחן ביליארד קמור זה עקום חלק (כלומר אפשר לעבור עליו מסביב במהירות חיובית בלי לבצע פניות חדות). הוכיחו כי קיים מסלול ביליארד סגור שהוא מחומש.



6. נתונים שני מצולעים קמורים, אחד ירוק ואחד כחול. הראו כי ניתן להזיז את המצולע הירוק בלי לסובב, כך שהחיתוך של שני המצולעים יקיים את התכונה הבאה: אם הופכים כל צלע שלו לווקטור, כאשר הווקטורים מכוונים נגד כיוון השעון, אז סכום הווקטורים הכחולים שווה לווקטור ה-0, וכך גם סכום הווקטורים הירוקים (צבע הווקטור מתקבל מהמצולע שיצר אותו).

7. נתון פאון מרחבי. לכל מישור שחותך אותו, החיתוך הוא מצולע שאורכי צלעותיו l_1, \dots, l_n , ובצלע מספר i הזווית שנוצרת בין המצולע לבין הפאה שמכילה את הצלע היא α_i . אנו נגיד שהמישור הוא שמח אם בביטוי $\pm l_1 \cot \alpha_1 \pm l_2 \cot \alpha_2 \pm \dots \pm l_n \cot \alpha_n$ ניתן לבחור סימנים בצורה כזאת שהביטוי יתאפס. הראו שלכל מישור שלא מקביל לאף פאה, קיים מישור מקביל אליו שהוא שמח, שהוא מפצל את הפאון לשני חלקים עם נפח חיובי.



8. א. דרך נקודה בתוך העיגול מעבירים 4 ישרים, שמייצרים 8 זוויות של 45° סביב הנקודה. הישרים מחלקים את העיגול ל-8 חלקים, שנצבעו לחלופין בשני צבעים: ירוק וכחול. הראו כי השטח הירוק שווה לשטח הכחול. ב. נסו להמציא הכללות לסעיף הקודם.

בתאבון!