צפיפות

1. המספרים הטבעיים חולקו לסדרות חשבוניות עם הפרשים d_i.

א. הוכיחו כי

$$\sum_i \frac{1}{d_i} \leq 1$$

ב. האם בהכרח מתקיים שוויון כאשר כמות הסדרות סופית? אינסופית?

2. האם כל מספר טבעי גדול מספיק ניתן להציג בתור סכום של ריבוע, חזקה שלישית וחזקה שישית של מספרים שלמים חיוביים.

3. הוכיחו שכל מספר גדול מספיק הוא סכום של שני חסרי-ריבועים.

4. תהי $A \subset \mathbb{N}$ קבוצה כך שלכל n מתקיים $|A \cap \{1, \dots, n\}| \geq 0.01n$. הוכיחו שניתן לבחור תת-סדרה אינסופית מ-A כך שאף שני איברי הסדרה לא מתחלקים זה בזה.

5. האם קיימת קבוצה אינסופית M של שלמים חיוביים כך שלכל $a < b \in M$, $a + b$ חסר ריבועים.

6. יהי k טבעי. N נקרא מספק אם יותר מ- 99% מהמספרים

$$\binom{N}{0}, \binom{N}{1}, \dots, \binom{N}{N}$$

מתחלקים ב- k. הוכיחו כי קיים N כך שיותר מ- 99% מהמספרים בין 1 ל- N מספקים.

7. תהי $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המקיימת שלכל $m, n \in \mathbb{N}$, $\frac{f^n(m) - m}{n}$ שלם חיובי ושהמשלים של התמונה של f סופי. הוכיחו כי הסדרה

$$f(1) - 1, f(2) - 2, f(3) - 3, \dots$$

מחזורית.

8. הוכיחו כי קיימים רצפים ארוכים כרצונכם של טבעיים עוקבים כך שלכל שני מספרים ברצף יש כמות שונה של מחלקים.

9. הוכיחו שיש אינסוף n כך ש: א. $n^2 + n + 1 | [\sqrt{n}]!$ ב. $n^3 - 3n + 1 | n!$.

10. פולינום מגניב הוא פולינום אי-פריק שלמקדמים שלו אין מחלק משותף.

א. הוכיחו שאם P, Q פולינומים מגניבים מדרגה 1 אז ישנם אינסוף n עבורם $P(n), Q(n)$ חסרי ריבועים.
ב. הוכיחו שאם P, Q פולינומים מגניבים מדרגות 1,2 בהתאמה אז ישנם אינסוף n עבורם $P(n), Q(n)$ חסרי ריבועים.

ג. מה לגבי שלושה פולינומים לינארים?

ד. מצאו קבוצת פולינומים עבורה הטענה לא נכונה, מצאו תנאי מספיק והכרחי לכך שהטענה נכונה, שאפשר לבדוק אותו בזמן סופי.