

יחסים כפולים

1. במשולש ABC זווית A ישרה. המעגל החוסם של ABC יסומן Ω . התיכונים m - B ומ- C חותכים את Ω ב- D, E בהתאמה, והמשיקים ל- Ω ב- D, E חותכים את הישרים AB, AC בנקודות X, Y בהתאמה. הוכיחו כי ישר XY משיק ל- Ω .

2. במשולש ABC מעגל ω משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הנקודה הנגדית ל- D על ω נקראת N , והמשיק מ- N ל- ω חותך את AB, AC ב- P, Q בהתאמה. החיתוך של EF עם BC יסומן ב- K . הוכיחו כי המשיק השני מ- K ל- ω חוצה את PQ .

3. נתון משולש ABC שווה שוקיים ($AB = AC$). מעגל ω עם מרכז באמצע BC משיק לצלעות AB, AC בנקודות E, F בהתאמה. מעגל עם קוטר AE חותך שנית את ω ב- P . המשיק ב- P ל- ω חותך את AC בנקודה Q . הוכיחו כי BQ חוצה את EF .

4. על הצלע BC של משולש ABC נבחרה נקודה D . ישר AD חותך את המעגל החוסם של ABC בנקודה E . אמצעי הקטעים AB, CD יסומנו M, N בהתאמה. הישרים AD, MN נחתכים ב- F . הוכיחו כי B נמצאת על הציר הרדיקלי של המעגלים DNF, CEF .

5. במשולש ABC המעגל החסום יסומן ב- ω . התיכון מ- A חותך את ω בנקודות D, E . המקבילים ל- BC דרך D, E חותכים שנית את ω בנקודות X, Y בהתאמה. הישרים AX, AY חותכים את BC בנקודות P, Q בהתאמה. הוכיחו כי $BQ = CP$.

6. על הצלעות BC, AC, AB של משולש ABC נבחרו נקודות A_1, B_1, C_1 כך ש- AA_1, BB_1, CC_1 נפגשים בנקודה. על הישרים B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 נבחרו נקודות A_2, B_2, C_2 כך ש- A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נפגשים בנקודה. הוכיחו כי AA_2, BB_2, CC_2 נפגשים בנקודה.

7. AB הוא קוטר במעגל החוסם של המרובע $ABCD$, ומרכז המעגל הוא O . המשיקים מ- C ומ- D למעגל החוסם נחתכים ב- E , והאלכסונים של $ABCD$ נחתכים ב- F . הישרים CD, EF נפגשים בנקודה K , והישרים CO, BK נפגשים בנקודה G . הוכיחו כי $\angle ABC = \angle FGE$.

8. נתון משולש ABC . על BC נבחרו נקודות D, P , על AC נבחרו נקודות E, Q , ועל AB נבחרו נקודות F, R כך ש- AD, BE, CF נפגשים בנקודה וגם AP, BQ, CR נפגשים בנקודה. החיתוך של הישרים DE, PQ יסומן ב- X והחיתוך של הישרים DF, PR יסומן ב- Y . הוכיחו כי X, A, Y על ישר אחד.

9. במשולש ABC המעגל החסום מבחוץ מול A משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. X היא הנקודה הנגדית ל- D על מעגל זה. הישרים המאונכים ל- BC דרך B, C חותכים את EF בנקודות P, Q בהתאמה. XP, XQ חותכים את BC ב- Y, Z . נתון כי מפגש הגבהים במשולש XYZ , שיסומן ב- H , נמצא על EF . הוכיחו כי עקב האנך מ- X ל- EF נמצא על מעגל HYZ .

10. נתון מרובע חסום במעגל שאלכסוניו נחתכים ב- P . בנוסף נתון מעגל ω שמשיק להמשכי הצלעות AB, BC, CD, DA בנקודות X, Y, Z, T בהתאמה. מעגל Γ עובר ב- A, B ומשיק חיצונית ל- ω בנקודה S . הוכיחו כי זווית $\angle PSZ$ ישרה.

11. נתון משולש ABC שחסום במעגל Ω . מעגל שמרכזו P ועובר ב- B, C חותך שנית את AB, AC ב- F, E בהתאמה. הקטעים BE, CF נפגשים בנקודה H והישר AH חותך את BC בנקודה D .

א. תהא S נקודת החיתוך של EF עם PH . המשיקים ב- B, C ל- Ω נפגשים ב- X . הוכיחו שהנקודות X, D, S נמצאות על ישר אחד.

ב. אמצעי הקטעים BC, EF יסומנו M, N בהתאמה. הישר NH חותך את BC בנקודה K . עקב האנך מ- A ל- NH יסומן L . הוכיחו כי המעגל החוסם של MKL משיק ל- Ω .