הגדרות ותכונות חשובות

- תהיינה A, B, C, D נקודות שונות על ישר אחד או על מעגל אחד.
נגדיר את **היחס הכפול** $[A, B; C, D] = \frac{AC}{BC} / \frac{AD}{BD}$.

- תהיינה A, B, C, D נקודות שונות על ישר אחד או על מעגל אחד. נגיד כי A, B, C, D היא **רביעייה הרמונית** אם מתקיים $[A, B; C, D] = -1$.

- למות חשובות:

1. יהיו l_1, l_2 ישרים. תהי O נקודה שאינה על אף אחד מהישרים, A, B, C, D נקודות על l_1. לחיתוכים של OA, OB, OC, OD עם l_2 נקרא E, F, G, H בהתאמה.
אזי $[A, B; C, D] = [E, F; G, H]$.

2. יהיו ישר l ומעגל ω. תהיינה O, A, B, C, D נקודות על ω. לחיתוכים של OA, OB, OC, OD עם l נקרא E, F, G, H בהתאמה.
אזי $[A, B; C, D] = [E, F; G, H]$.

- דוגמאות לרביעיות הרמוניות:

1. יהי קטע AB, נסמן את אמצע הקטע ב-M. אזי A, B, M, ∞_{AB} היא רביעייה הרמונית.

2. יהי משולש ABC, ותהיינה D, E, F נקודות על הצלעות BC, AC, AB בהתאמה כך שהישרים AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת. נסמן את החיתוך של הישר EF עם הישר BC באות G, אזי B, C, D, G היא רביעייה הרמונית.

3. יהי מעגל ω, ותהיינה נקודות A, B, C, D על המעגל כך שהישר CD והמשיקים למעגל בנקודה A ונקודה B נפגשים בנקודה אחת. אזי A, B, C, D היא רביעייה הרמונית.

שאלות

1. יהי משולש ABC, ותהי נקודה D על התיכון לצלע BC. הישר BD פוגש את הצלע AC בנקודה E והישר CD פוגש את הצלע AB בנקודה F. הוכח $AB||EF$.

2. יהיו שני ישרים l_1, l_2 הנפגשים בנקודה O. יהיו A, B, C נקודות על l_1 ו-D, E, F נקודות על l_2. נסמן את החיתוך של הישרים AE ו-BD באות X, ואת החיתוך של הישרים AD ו-BE באות Y. נתון שהישר OX חוצה את הקטע CF, הוכח $OY||CF$.

3. נתון מרובע $ABCD$. נתונות נקודות X_1, X_2 על הצלע AB, נקודות Y_1, Y_2 על הצלע BC, נקודות Z_1, Z_2 על הצלע CD, ונקודות W_1, W_2 על הצלע DA. נתון כי הישרים AY_1, X_1Y_2, X_2C נפגשים בנקודה, הישרים BZ_1, Y_1Z_2, Y_2D נפגשים בנקודה, והישרים CW_1, Z_1W_2, Z_2A נפגשים בנקודה. הוכח כי הישרים DX_1, W_1X_2, W_2B נפגשים בנקודה.

4. יהי משולש ABC, ותהיינה D, E נקודות על הצלע BC המקיימות $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$. לעקבי הגבהים מהקודקוד B לישרים AD, AE נקרא P, Q בהתאמה, ובאופן דומה, לעקבי הגבהים מהקודקוד C לישרים AD, AE נקרא R, S בהתאמה. הוכח כי הישרים PS, RQ נפגשים על הישר BC.

5. נתון משולש ABC. לעקב חוצה זווית A נקרא D. המעגל החסום במשולש ABD משיק לצלעות AB, BD בנקודות E, F בהתאמה. המעגל החסום מבחוץ מול A במשולש ADC משיק להמשך הצלע AD בנקודה G. הוכח כי E, F, G על ישר אחד.

6. נתון משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ החסום במעגל ω. המשיקים למעגל בנקודות A ו-B נפגשים בנקודה D. אמצע הקטע AD יסומן באות M. הוכח כי הישרים BM, CD נפגשים על ω.

7. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הישר AD חותך שנית את המעגל בנקודה G. המשיק למעגל בנקודה G חותך את הצלעות AB, AC בנקודות X, Y בהתאמה. הוכח כי הישרים AD, BY, CX נפגשים בנקודה.

8. נתון משולש ABC, ונתונה נקודה D על הצלע BC. נסמן את עקבי האנכים מהנקודה D לצלעות AB, AC באותיות E, F בהתאמה. נתון כי הישרים AD, BF, CE נפגשים בנקודה. נסמן את החיתוך של הקטע DE עם קטע האמצעים שמול C באות P, ואת החיתוך של הקטע DF עם קטע האמצעים שמול B באות Q. הוכח כי הנקודות A, P, Q נמצאות על ישר אחד.

9. נתון משולש ABC. המעגל החסום במשולש משיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה ומרכזו הוא I. הוכח כי הישר EF והישר המחבר בין מרכזי המעגלים החסומים בדלתונים $BDIF, CEID$ נפגשים על הישר BC.

בתאבון!