חשבון

בתרגיל זה נסמן את כמות המחלקים של n ב-$d(n)$ ואת סכום המחלקים של n ב-$\sigma(n)$

1. יהיו $\varepsilon > 0$, $x \geq 1$. הוכיחו שיש n עבורו $\frac{\sigma(n)}{n} \in [x, x+\varepsilon]$.

2. a_n היא סדרה של טבעיים המקיימת $a_n < 2023n$. הוכיחו שיש אינסוף ערכים של n עבורם a_n מחלק את $lcm(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

3. מיכאל כתב את כל החזקות השלמות בשורה בסדר עולה. הוכיחו שיש אינסוף איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם מתחלק ב-9999.

4. נסמן ב-D_n את קבוצת המחלקים של n וב-$f(n)$ את המספר המינימלי עבורו האיברים של D_n שונים מודולו $f(n)$. הוכיחו כי לכל n גדול מספיק $f(n) < n^{\frac{1}{100}}$.

5. עבור פולינום עם מקדמים שלמים P, נגדיר:
$$a_n = \begin{cases} 0 & P(n) \leq 0 \\ \gcd\Big(P(n), d\big(P(n)\big)\Big) & P(n) > 0 \end{cases}$$
האם ייתכן ש-a_n שואפת לאינסוף?

6. הוכיחו שקיים קבוע $c > 0$ וסדרה עולה של טבעיים $a_1, a_2, \dots$ כך ש-$a_n < c \cdot 1.01^n$ וסכום כל תת קבוצה סופית של הסדרה הוא לא ריבוע.

7. יהי $c > 0$. הוכיחו שיש אינסוף ערכים של n עבורם:
   א. $\varphi\big(\sigma(n)\big) > cn$.
   ב. $\frac{\varphi(d(n))}{d(\varphi(n))} > c$

8. לכל מספר טבעי n, נסמן ב-$f(n), g(n)$ את הטבעיים המינימליים עבורם:
$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \frac{f(n)}{g(n)}$$
קבעו האם קיים n טבעי עבורו $g(n) > n^{0.999n}$.

9. נתון פולינום עם מקדמים שלמים f ומספר טבעי $a > 1$. נסמן ב-S את קבוצת המספרים n עבורם $n | a^{f(n)} - 1$. הוכיחו של-S יש צפיפות 0, כלומר $\lim_{n\to\infty} \frac{|S \cap \{1,2,\dots,n\}|}{n} = 0$.

10. נסמן ב-$\omega(n)$ את כמות המחלקים הראשוניים השונים של n. מצאו את כל הפולינומים עם מקדמים שלמים $P(x)$ עבורם לכל m, n מתקיים
$$\omega\big(P(mn)\big) \leq \omega\big(P(m)P(n)\big)$$