הוכחות קונסטרוקטיביות ואלגוריתמים

1. נתונים n^2 חרוזים ב-n צבעים שונים, לא בהכרח n חרוזים מכל צבע. הוכיחו כי ניתן לחלק את החרוזים ל-n ערימות כך שבכל ערימה יהיו n חרוזים ב-2 צבעים לכל היותר.

2. הוכיחו כי אם בגרף על N קודקודים מתקיים שלכל שני קודקודים לא שכנים u, v סכום הדרגות שלהם הוא לפחות N אז בגרף קיים מעגל המילטון.

3. נתון גרף מלא ממושקל על n קודקודים, לכל שתי קשתות משקל שונה. הוכיחו כי קיים מסלול באורך $n-1$ קשתות בגרף כך שהמשקל של כל קשת במסלול גדול מהמשקל של הקשת הקודמת.

4. נתון דף משבצות אינסופי, N מהמשבצות צבועות בשחור כך שלכל משבצת שחורה יש כמות זוגית של משבצות שחורות שכנות לפי צלע. הוכיחו כי ניתן לצבוע חלק מהמשבצות הלבנות בכחול כך שלכל משבצת שחורה תהייה כמות זהה של משבצות שכנות לבנות וכחולות.

5. יותם רשם את כל 2^n המחרוזות באורך n שמורכבות מהספרות 1 ו-1−. זיבלי הנזק החליף חלק מהספרות באפסים. הוכיחו כי ניתן לבחור מספר מחזורות שסכומן הוא מחרוזת האפס.

6. נבחרת של $N(N+1)$ שחקני כדורגל, אשר כל שניים מתוכם בעלי גבהים שונים, עומדים בשורה. המאמן רוצה להשאיר $2N$ שחקנים בשורה כך שיתקיימו N התנאים הבאים:
(1) אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הגבוהים ביותר בשורה,
(2) אף אחד לא עומד בין השחקנים השלישי והרביעי הכי גבוהים בשורה

...
(N) אף אחד לא עומד בין שני השחקנים הנמוכים ביותר בשורה.
הראו כי זה תמיד אפשרי.

7. נתונות 100 קופסאות עם תפוחים תפוזים ואגסים. הוכיחו כי ניתן לבחור 51 קופסאות כך שהן יכילו לפחות מחצית מכל סוגי הפירות.

8. תהי $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ קבוצה של שלמים חיוביים שקטנים או שווים ל-n ותהי קבוצה $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ קבוצה של שלמים חיוביים שקטנים או שווים ל-m. הוכיחו כי ניתן לבחור תת קבוצה של X ותת קבוצה של Y כך שהסכומים של שתי תתי הקבוצות יהיו שווים.

9. נתונות $4N$ אבנים בעלות משקלים $1,2,\dots,4N$. כל אחת מהאבנים צבועה באחד מ-N צבעים, ויש בדיוק ארבע אבנים מכל צבע. הראו כי ניתן לחלק את האבנים לשתי ערימות, כך ששני התנאים הבאים מתקיימים:
א. המשקלים הכוללים של שתי הערימות שווים זה לזה
ב. בכל ערימה יש בדיוק שתי אבנים מכל צבע.

10. במעגל יושבים 100 נציגים של 25 מדינות, 4 נציגים מכל מדינה. הוכיחו כי ניתן לחלק אותם ל-4 קבוצות כך שבכל קבוצה יהיה נציג אחד מכל מדינה ואף שני אנשים מאותה הקבוצה לא יושבים זה על יד זה.

11. נתון גרף עם קליקה מקסימלית בגודל זוגי. הוכיחו כי ניתן לחלק את הגרף לשני תתי גרפים כך שגודל הקליקה המקסימלית בשניהם זהה.

12. יהיו $a_1, \dots, a_n$ שלמים חיוביים שסכומם מתחלק ב-n. הוכיחו כי קיימות תמורות $(b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n)$ של $(1, \dots, n)$ כך ש-$a_i \equiv b_i + c_i \mod n$, לכל $1 \le i \le n$.

בתאבון!