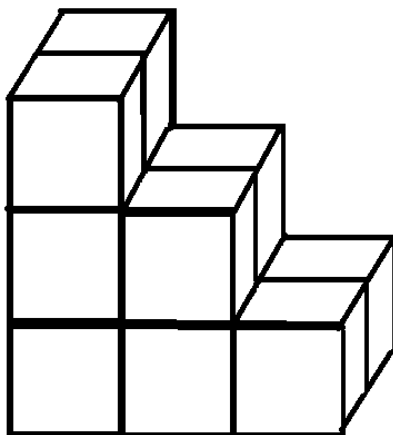


תרגיל קומבינאטורי

1. במינקלנד יש מספר ערים, ו- N חברות תעופה. חלק מזוגות הערים מחוברים בקו תעופה של אחת מ- N החברות, ונתון שמכל עיר יוצא קו תעופה אחד בדיוק של כל חברה. כמו כן, ידוע כי ניתן להגיע מכל עיר במינקלנד לכל עיר אחרת בעזרת קווי תעופה. במהלך משבר כלכלי $1-N$ חברות נאלצו לסגור את אחד מהקווים שלהן. הוכיחו שעדיין ניתן לטוס מכל עיר במינקלנד לכל עיר אחרת.
2. 10000 עוגיות מסודרות במלבן 100×100 , ועל כל אחת רשום מספר שלם. עוגיפלטת בוחר בכל פעם מלבן שמלא בעוגיות שעוד לא נאכלו, בו סכום המספרים על העוגיות מתחלק ב-17, ואוכל את כל העוגיות שבו. מה הכמות המקסימלית של עוגיות שעוגיפלטת יכול בוודאות לאכול?
3. נתונה טבלה מלבנית בה בכל משבצת רשום מספר ממשי. הסכום בכל שורה ובכל עמודה שלם. הוכח שניתן להחליף כל מספר בעיגול שלו כלפי מעלה או בעיגול שלו כלפי מטה כך שסכומי השורות והעמודות ישמרו.
4. עבור אילו ערכים של n ניתן לרצף קוביה $n \times n \times n$ על ידי מדרגות? מדרגה היא צורה כזו:



5. צורה של נקודות שלמות במישור נקראת קשירה אם כשמחברים כל שתי נקודות בקבוצה שבמרחק 1, הגרף שנוצר קשיר. בהינתן צורה קשירה K , נגדיר את הקבוצה
- $$\Delta(K) = \{\overrightarrow{rs} \mid r, s \in K\}$$
- אם ידוע ש $|K| = 2n + 1$, מהו הערך המקסימלי של $|\Delta(K)|$?
6. במסיבה יש בנים ובנות. קבוצת בנים נקראת פופולרית אם כל בת מכירה לפחות אחד מהם. באופן דומה, קבוצת בנות נקראת פופולרית אם כל בן מכיר לפחות אחת מהן. הוכיחו שכמות קבוצות הבנים הפופולריות וכמות קבוצות הבנות הפופולריות הן מאותה הזוגיות.
7. בכל משבצת של לוח $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ רשום 1 או -1. סידור כזה נקרא מוצלח אם כל הערך במשבצת שווה למכפלת הערכים במשבצות השכנות. לכל $n \geq 2$, מצא את כמות הסידורים המוצלחים.
8. יהא k מספר טבעי. נתונה קבוצה X שחלק מתתי הקבוצות שלה בגודל $2k$ נקראות טובות. נתון שלכל תת קבוצה של X מגודל $(k + 1)^2$ לכל היותר, לכל הקבוצות הטובות שמוכלות בה (אם יש כאלו) יש איבר משותף. הוכח שלכל הקבוצות הטובות יש איבר משותף.
9. לוח משבצות מלבני מחולק לאבני דומינו כך שכל משבצת מכוסה פעם אחת בדיוק, חוץ מאחת הפינות, שלא מכוסה כלל. כל פעם מותר "להחליק" דומינו לתוך המשבצת הריקה, כך שמשבצת אחרת נחשפת. הוכיחו שניתן בדרך זו לחשוף כל אחת מפינות המלבן.

בתאבון!