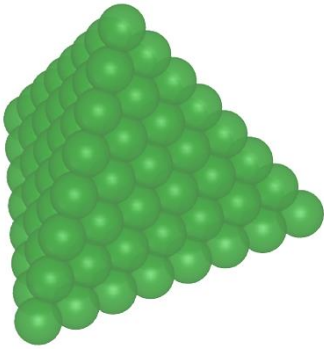


תרגיל קומבי



1. איילה וברוזה משחקים משחק פטרייתי תלת-ממדי בלוח ארבעוני המורכב מתאים כדוריים, כאשר בכל מקצוע 8 תאים (ראו איור). בשלב הראשון של המשחק איילה מכניסה פטריות על משבצות הלוח: פטרייה אחת לכל היותר על כל משבצת. לאחר מכן ברוזה יכול לבצע כמות כלשהי של מהלכים משני הסוגים הבאים, בכל סדר שהוא יבחר:

(א) לבחור שלושה תאים ריקים שכל שניים מהם סמוכים זה לזה ולהוסיף פטרייה לכל אחד מהם.



(ב) לאסוף ארבע פטריות מתאים שכולם סמוכים זה לזה.

מטרתו של ברוזה היא שתשארנה בסוף המשחק כמה שפחות פטריות, ומטרתה של איילה היא שתשארנה כמה שיותר. כמה פטריות יכולה איילה להבטיח שתשארנה על הלוח בסוף המשחק?

הערה. איילה וברוזה הן לוטרות מעופפות בעלות יכולת התעתקות, המאפשרת להן להגיע בכל רגע נתון גם לתאים פנימיים. בסה"כ יש 120 תאים בלוח.

2. נתונות 2001 אבנים, שמשקלן הכולל הוא 1001 גרם. אף אבן לא שוקלת יותר מ- $1+x$ גרם. מצאו את הערך המרבי של x עבורו בהכרח ניתן לחלק את האבנים ל-2 קבוצות שמשקלן הכולל שונה בלא יותר מ-1 גרם.

3. ליוסי הייתה ערמה של 100 אבנים. בכל תור יוסי חילק את אחת מהערמות לשתי ערמות קטנות יותר, עד שהוא קיבל 100 ערמות של אבן אחת. הוכיחו כי:

א. בתור מסוים היו 30 ערמות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

ב. בתור מסוים היו 20 ערמות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

ג. הוכיחו שיוסי יכול היה לחלק את הערמות כך שבאף תור לא היו 19 ערמות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

4. סביב שולחן עגול יושבים 100 אנשים מ-25 מדינות, 4 נציגים מכל מדינה. הראו שניתן לחלק אותם ל-4 קבוצות של 25, כך שבאף קבוצה לא יהיו שני נציגים מאותה מדינה, ובאף קבוצה לא יהיו שני אנשים שישבו זה ליד זה במעגל.

5. מחרוזת מעגלית מורכבת מ-2013 חרוזים, כאשר כל חרוז יכול להיות לבן או ירוק. מחרוזת נקראת מגניבה, אם מכל 21 חרוזים עוקבים יש לפחות חרוז ירוק. מחרוזות שיש להן צבע שונה בחרוז מסוים, אבל אפשר להופך אחת לשנייה באמצעות סיבוב או שיקוף, נחשבות שונות. הוכיחו שהמספר הכולל של מחרוזות מגניבות הוא בהכרח אי-זוגי.

6. קוביה בינונית $3 \times 3 \times 3$ מורכבת מ-26 קוביות קטנות לבנות $1 \times 1 \times 1$, וקוביה קטנה שחורה במרכז. קוביה גדולה עשויה מ- $n \times n \times n$ קוביות בינוניות. כמה קוביות לבנות קטנות צריך לצבוע באדום על מנת שלכל קוביה לבנה קטנה יהיה לפחות קודקוד אחד משותף עם קוביה לבנה קטנה.

7. נתונות 100 ערמות, ובכל ערימה 400 אבנים. בכל מהלך, אבנר בוחר שתי ערמות, מוריד אבן אחת מכל אחת מהן, ומקבל כמות נקודות השווה להפרש (האי-שלילי) בין כמויות האבנים בשתי הערמות. אבנר חייב להוריד את כל האבנים בסופו של דבר. מהו הסכום הנקודות המקסימלי שאבנר יכול להרוויח?

8. במישור סומנו 5776 ריבועים, כאשר צלעות כל ריבוע מקבילות לצלעות של כל ריבוע אחר, וכולם באותו גודל. נניח כי מבין כל 17 ריבועים יש 4 שיש להם נקודה משותפת. הוכיחו כי ניתן לסמן

א. 20 נקודות,

ב. 16 נקודות,

כך שכל ריבוע מכיל נקודה מסומנת.

בתאבון!