

# תרגיל אלגברי

1. יהיו  $A_1, \dots, A_{n+1} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  תתי קבוצות לא ריקות. הראו שניתן לבחור מתוך  $A_1, \dots, A_{n+1}$  שתי משפחות זרות שאיחודן זהה.
2. יהיו  $A_1, \dots, A_{n+2} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  תתי קבוצות לא ריקות. הראו שניתן לבחור מתוך  $A_1, \dots, A_{n+2}$  שתי משפחות זרות שאיחודן זהה וגם חיתוכן זהה.
3. בעיירה יש  $n$  אנשים, שהולכים לכמה מועדונים. נניח שלכל מועדון הולכת כמות זוגית של אנשים, והחיתוך בין כל שני מועדונים מכיל כמות זוגית של אנשים. מצאו את הכמות המקסימלית של מועדונים.
4. אותה שאלה כמו 3 רק שהגודל של כל מועדון הוא אי זוגי והחיתוך הוא זוגי.
5. יהיו  $A_1, \dots, A_{n+1} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  תתי קבוצות שונות בגודל 3. הראו שקיימים  $i, j$  כך ש- $|A_i \cap A_j| = 1$ .
6. יהי  $n > 1$  שלם. נניח שקיים  $m$  כך שיש בעיירה  $mn$  אנשים, שכל אחד הולך לשני מועדונים בדיוק. בנוסף, נתון שיש  $2n$  מועדונים (כל אחד מהם בגודל  $m$ ) ולכל שני מועדונים יש לכל היותר בן אדם אחד שהולך לשניהם יחד. כתלות ב- $n$ , מצאו את הערך המקסימלי של  $m$ .
7. נתונים  $n$  מספרים  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ . ידוע שאם  $d < 1$  הוא הפרש של זוג  $x$ -ים, אז הוא אפילו הפרש של עוד זוג  $x$ -ים. הראו שכל ה- $x$ -ים רציונליים.
8. נתונות  $k$  נקודות ב- $\mathbb{R}^n$  כך שהמרחק בין כל שתיים מהן שווה. מצאו את הערך המקסימלי של  $k$ .
9. נתונות  $k$  נקודות ב- $\mathbb{R}^n$  ושני מספרים ממשיים  $x, y$  כך שהמרחק בין כל שתי נקודות הוא או  $x$  או  $y$ . הראו כי  $k \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}$ . מצאו דוגמה עבורה  $k = \binom{n}{2}$ . האם אתם יכולים לשפר את החסם הדוגמה?

**בתאבון!**