

גיאומטריה קומבינאטורית

1. במרחב נתונים 2016 כדורים שונים: חלק מהם אדומים, וחלק ירוקים. צובעים בכחול כל נקודת השקה בין כדור אדום לכדור ירוק. מצאו את הכמות המרבית של נקודות כחולות שיכולה להיות.

2. בפאון קמור, אלכסון הוא קטע שמחבר שני קודקודים ולא נמצא על המשטח של אחת הפאות. האם לכל n קיים פאון שיש לו בדיוק n אלכסונים?

3. האם אפשר לצייר במישור 5 מעגלים כך שכמות נקודות החיתוך של כל מעגל עם כל המעגלים האחרים יחדיו היא:

א. 5 נקודות בדיוק? ב. 6 נקודות בדיוק? ג. 7 נקודות בדיוק?

4. במצולע בעל n קודקודים כל המרחקים בין זוגות קודקודים הם שונים.
א. קודקוד נקרא עצוב אם הקודקוד הקרוב ביותר אליו אינו סמוך לו לפי צלע. מהי הכמות המינימלית של קודקודים עצובים?

ב. קודקוד נקרא מגניב אם הקודקוד הרחוק ביותר ממנו סמוך לו לפי צלע. מהי הכמות המקסימלית של קודקודים מגניבים?

5. במישור נתונים n מצולעים קמורים בעלי k צלעות שחותכים זה את זה. כל אחד מהם אפשר להעביר לכל אחד אחר באמצעות הומותטיה עם מקדם חיובי. הראו שקיימת נקודה שנמצאת בתוך

$$\text{א. לפחות } 1 + \frac{n-1}{2k} \text{ מצולעים.} \quad \text{ב. לפחות } \frac{n}{18} \text{ מצולעים.}$$

6. האם קיים מלבן שניתן לחלק אותו לחלקים, שאחד מהם הוא משושה משוכלל שאורך הצלע שלו 1, והאחרים הם משולשים ישרי זווית עם אורכי ניצבים 1 ו- $\sqrt{3}$?

7. נתון פאון (גוף מעץ מלא שחסום על ידי פאות מישוריות), שאינו קמור. הוכיחו שיש לפאון זה חתך מישורי עם שטח חיובי שאינו מצולע (אבל יכול להיות מצולע עם חור, או איחוד זר של יותר ממצולע אחד).

8. סבתא אפתה עוגה בצורה של מלבן מישורי. לסבתא יש סכין ארוכה שמאפשרת לחלק את העוגה לאורך קו שמחבר שתי נקודות נתונות (למשל, כבר בהתחלה ניתן לחתוך את העוגה לאורך אלכסון). מותר גם להזיז חלקים של העוגה ולהצמיד אותם בצורה אחרת.

א. סבתא רוצה לחלק את העוגה ל-3 מנות שוות שטח עבור שלושת הנכדים שלה. מהי כמות החיתוכים המינימאלית שהיא צריכה לבצע?

ב. הוכיחו שסבתא יכולה לחלק את העוגה ל- n מנות שוות שטח, כאשר n זו כמות הילדים בגן (מספר טבעי כלשהו).

9. הראו שבמרחב n -ממדי (כאשר $n \geq 2$) יש לפחות $2^{\frac{n}{2}}$ נקודות

בתאבון!

שכל שלוש מהן יוצרות משולש שזוויותיו חדות.