

גיאומטריה קומבינאטורית

1. במשולש ABC העבירו שלוש צ'ביאנות שנפגשות בנקודה אחת, כתוצאה מכך נוצרים 12 קטעים. האם בהכרח ניתן ליצור ארבעה משולשים מ-12 הקטעים הנוצרים?
2. במישור נתונים שני קווים שבורים סגורים a, b (יתכנו חיתוכים עצמיים) ונקודות M, I, N, K . הקודקודים של a, b והנקודות M, I, N, K נמצאים במצב כללי. כל אחד מהקטעים NK ו- MI חותך את a בכמות זוגית של נקודות וכל אחד מהקטעים MN ו- KI בכמות אי-זוגית. לעומת זאת b חותך את הקטעים MI ו- NK בכמות אי-זוגית ואת הקטעים MN ו- KI בכמות זוגית. הוכיחו כי a, b נחתכים.
3. במישור עומדים מספר קאובויים נקודתיים, כל קאובוי חובש קובע באחד מבין N צבעים. אם שני קאובויים עם קובעים בצבע זהה יכולים לירות זה בזה (כלומר אין קאובוי שלישי שעומד ביניהם) אז הם עושים זאת. עבור אילו ערכי N ניתן למקם במישור קאובויים כך שלא יהיה צבע עבורו כל הקאובויים עם קובעים בצבע זה עומדים על ישר אחד ושלא ישמעו יריות.
4. בריבוע עם אורך צלע 1 סומנו 100 נקודות. טווס רוצה לצבוע 50 מהנקודות המסומנות בכחול ו-50 בצהוב כך שההפרש בין השטח של הקמור הכחול והשטח של הקמור הצהוב לא יעלה על a . מצאו את ה- a הקטן ביותר עבורו טווס בטוח תוכל לצבוע את הנקודות.
5. האם אפשר לצייר במישור 5 מעגלים כך שכמות נקודות החיתוך של כל מעגל עם כל המעגלים האחרים יחדיו היא:
א. 5 נקודות בדיוק? ב. 6 נקודות בדיוק? ג. 7 נקודות בדיוק?
6. במצולע בעל n קודקודים כל המרחקים בין זוגות קודקודים הם שונים.
א. קודקוד נקרא עצוב אם הקודקוד הקרוב ביותר אליו אינו סמוך לו לפי צלע. מהי הכמות הגדולה ביותר של קודקודים עצובים?
ב. קודקוד נקרא מגניב אם הקודקוד הרחוק ביותר ממנו סמוך לו לפי צלע. מהי הכמות הגדולה ביותר של קודקודים מגניבים?
7. במישור נתונים n מצולעים קמורים, לכל מצולע k צלעות וכל שני מצולעים נחתכים זה עם זה. כל מצולע ניתן להעביר לכל מצולע אחר באמצעות הומותטיה עם מקדם חיובי. הראו שקיימת נקודה שנמצאת בתוך
א. לפחות $1 + \frac{n-1}{2k}$ מצולעים. ב. לפחות $\frac{n}{18}$ מצולעים.
8. האם קיים מלבן שניתן לחלק לחלקים, שאחד מהחלקים הוא משושה משוכלל עם אורך צלע 1, והאחרים הם משולשים ישרי זווית עם אורכי ניצבים 1 ו- $\sqrt{3}$?
9. יהי $n \geq 3$ טבעי. נתונים שני מצולעים משוכללים A, B עם n צלעות כל אחד. הוכיחו שהקודקודים של A שנמצאים בפנים של B או על השפה שלו הם רצף של קודקודים עוקבים.
10. מצאו את הכמות המינימלית של מעגלים שונים במישור, כך שעל כל מעגל נמצאים מרכזים של לפחות k מעגלים שונים, עבור: א. $k = 3$ ב. $k = 4$?