

קומביגאו

1. בתוך משולש ישר זווית עם יתר באורך 1, סומנו נקודות P_1, P_2, \dots, P_n .

הוכיחו כי קיימת תמורה σ של $\{1, \dots, n\}$ כך ש- $|P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}|^2 + |P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}|^2 + \dots + |P_{\sigma(n-1)}P_{\sigma(n)}|^2 \leq 1$.

2. במישור סומנו 6 נקודות שאף שלוש מהן לא על ישר אחד. שחר מזווג את הנקודות לזוגות, כך שהקטעים שמחברים בין כל שני זוגות לא נחתכים. מהי הכמות המינימלית ומקסימלית של דרכים בהן שחר יכול לזווג את הנקודות?

3. בפירמידה משולשת משוכללת, אורך כל גובה שווה ל-3. במרחב סומנה כל נקודה שנמצאת בתוך הפירמידה או על שפת הפירמידה, אשר המרחקים ממנה לכל אחת מהפאות הם מספרים שלמים. מצאו את כמות הריבועים במרחב שכל הקודקודים שלהם הם נקודות מסומנות.

4. במרחב סומנו מספר נקודות שלא כולן במישור אחד. הראו כי יש מעגל שמכיל בדיוק שלוש נקודות מסומנות.

5. בתוך דף נייר מלבני יצרו N חורים, שהם מלבנים זרים עם צלעות שמקבילות לצידי הדף. עבור איזה K קטן ביותר ניתן להבטיח שניתן לחתוך את מה שנשאר מהדף ל- K חלקים שהם מלבנים?

6. האם במישור קיימות שתי קבוצות זרות אינסופיות A ו- B , כך שמתקיימות כל התכונות הבאות:

- אף שלוש נקודות ב- $A \cup B$ לא על ישר אחד,
- מרחק בין כל שתי נקודות ב- $A \cup B$ הוא לפחות 1,
- בתוך כל משולש שקודקודיו ב- A יש נקודה ששייכת ל- B ,
- בתוך כל משולש שקודקודיו ב- B יש נקודה ששייכת ל- A ?

7. האם ניתן לבחור במרחב 10 ישרים, שהמרחקים בין הזוגות יהיו 1, 2, 3, ..., 45, מרחק בין קבוצות כאן זה מרחק מינימלי בין איברי הקבוצה.

8. **א.** במישור נמצאים n מעגלים שונים. מעגלים נקראים קשורים אם יש להם נקודה משותפת. האם כל גרף על n קודקודים אפשר לתאר כגרף קשרים בין מעגלים?
ב. אותה שאלה עבור קליפות כדוריות במרחב תלת מימדי.

9. ארבעון מרחבי מחולק ל-5 פאונים קמורים. האם יתכן שלכל אחד מהפאונים הקמורים האלה יש בדיוק 8 פאות?

10. האם ניתן לצייר דיאגרמה של 11 נקודות במישור, הממוספרות על ידי מספרים מ-0 עד 10, כך ששלוש נקודות שונות יהיו על ישר אחד אם ורק אם סכום מספריהם מתחלק ב-11?

בתאבון!