

קומבי קצת אליים

1. ליוסי הייתה ערימה של 100 אבנים. בכל תור יוסי חילק את אחת מהערימות לשתי ערימות קטנות יותר, עד שהוא קיבל 100 ערימות של אבן אחת. הוכיחו כי:

א. בתור מסוים היו 30 ערימות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

ב. בתור מסוים היו 20 ערימות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

ג. הוכיחו שיוסי היה יכול לחלק את הערימות כך שבאף תור לא היו 19 ערימות שכמות האבנים הכוללת בהן הייתה בדיוק 60 אבנים.

2. על דף משבצות אינסופי N משבצות נצבעו בשחור. בכל דקה כל משבצות הדף משנות את צבען לפי הכלל הבא: עבור כל משבצת x מסתכלים על שלוש משבצות – על המשבצת x עצמה, על המשבצת השכנה מעליה ועל המשבצת השכנה מימינה – וצובעים את x מחדש לפי הצבע של הרוב מתוך השלוש.

הוכיחו כי לאחר לכל היותר N מהלכים כל הדף יהיה לבן.

3. נתונים N קלפים וסדר לא טרנזיטיבי עליהם. איילה מחלקת את החפיסה בין גמל ודורבן והם משחקים על פי הכללים הבאים: בכל מהלך כל שחקן מראה את הקלף העליון שלו. השחקן שהקלף שהראה הוא החזק מבין השניים לוקח את שני הקלפים ושם אותם בתחתית הערימה שלו בסדר לפי בחירתו. הוכיחו כי אם גמל ודורבן יודעים מה הקלפים בערימות שלהם ובאיזה סדר הם מסודרים אז הם יכולים לפעול כך שלאחר זמן מה כל הקלפים יהיו אצל אחד השחקנים (לכל בחירה של איילה לחלוקה של החפיסה ביניהם).

4. נתונים מספרים טבעיים a, b כך ש- $a < b < 2a$. על דף משבצות אינסופי נצבעו מספר משבצות כך שבכל מלבן $a \times b$ או $b \times a$ יש לפחות משבצת צבועה אחת. מהו הערך המקסימלי של α עבורו לכל צביעה כזו ולכל N ניתן למצוא ריבוע $N \times N$ שבו יש לפחות αN^2 משבצות צבועות?

5. לצייר מודרני יש לוח משבצות לבן 10×10 ו-3 צבעים. בכל שלב הוא יכול לצייר ריבוע כחול 1×1 , ירוק 2×2 או אדום 3×3 . לפי חוקי האסתטיקה אסור לשני ריבועים בעלי אותו צבע לגעת בצלע או בקודקוד. בנוסף אסור לצבוע משבצת כלשהי ביותר מצבע אחד.

נסו להגיע לציור עם כמות מינימלית של משבצות לבנות.

6. בליגת שחמט כל נבחרת מורכבת מ- N שחקנים. שתי נבחרות נפגשו וכל שחקן מהנבחרת הראשונה שיחק מול כל שחקן מהנבחרת השנייה. בכל משחק המנצח קיבל נקודה אחת והמפסיד אפס נקודות, או במקרה של תיקו שני השחקנים קיבלו חצי נקודה כל אחד. הניקוד של כל נבחרת הוא סכום ניקודי כל השחקנים בה. הוכיחו כי אם שתי הנבחרות קיבלו אותה כמות של נקודות אז היו שני שחקנים שקיבלו אותה כמות של נקודות.

7. בטורניר הוקי השתתפו 2020 נבחרות, וכל נבחרת שיחקה בדיוק פעם אחת נגד כל נבחרת אחרת. על פי החוקים, במשחק רגיל הנבחרת המנצחת מקבלת 3 נקודות והמפסידה 0 נקודות; אך אם בתום הזמן שתי הנבחרות נמצאות בתיקו, המשחק מוארך, והנבחרת שמבקיעה את השער הראשון מקבלת 2 נקודות והנבחרת השנייה רק נקודה אחת.

בסוף הטורניר סיפרו להיפו כמה נקודות כל נבחרת צברה.

"אם כן", היפו אמר, "לפחות M משחקים הוארכו."

מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של M .

בתאבון!