

קומביאלגברה

1. על הלוח רשומים 2020 שלמים חיוביים. בכל דקה מינק מוחק שני מספרים ומחליף אותם בסכום, הפרש, מכפלה או מנה שלהם. אחרי 2019 מהלכים רשום מספר יחיד והוא 2020. הראו כי מינק היה יכול לסיים את התהליך גם עם המספר 2020.

2. על 4032 כרטיסים כתובים 4032 מספרים חיוביים שונים. 2016 מהכרטיסים כחולים, ו-2016 אדומים. ידוע כי קיימים 64 מספרים חיוביים קסומים, כך שהמספרים הכתובים בכרטיסים בצבע אחד הינם סכומים של זוגות מהמספרים הקסומים, והמספרים הכתובים בכרטיסים בצבע השני הינם מכפלות של זוגות מהמספרים הקסומים. האם תמיד ניתן לקבוע באיזה צבע נכתבו הסכומים ובאיזה המכפלות?

3. על הלוח כתובים מספרים ממשיים שונים. שמעון רוצה לכתוב ביטוי שייתן את כל המספרים המופיעים על הלוח, ורק אותם. לשם כך, מותר לו לכתוב כל מספר ממשי שירצה, את הסימן המיוחד \pm , את הסימנים הרגילים $+$, $-$, \times וסוגריים. בחישוב הביטוי, בכל מקום בו מופיע הסימן \pm הוא יחושב גם $+$ וגם $-$, בכל קומבינציה אפשרית. למשל, אם על הלוח כתובים המספרים 4,6 שמעון יוכל לכתוב 5 ± 1 , ואם על הלוח כתובים המספרים 1,2,3 שמעון יוכל לכתוב $(2 \pm 0.5) \pm 0.5$. האם שמעון תמיד יכול לכתוב ביטוי כזה אם על הלוח כתובים:

א. המספרים 1,2,4.

ב. 100 מספרים ממשיים שונים כלשהם.

4. על הלוח רשומים בשורה המספרים החיוביים a_1, a_2, \dots, a_n . יוסי רוצה לרשום מתחת לכל מספר a_i את המספר $b_i \geq a_i$ כך שלכל שניים מהמספרים b_1, b_2, \dots, b_n המנה בין אחד מהם לשני היא מספר שלם. הראו כי יוסי יכול לבחור את המספרים בצורה כזאת שיתקיים אי-השוויון: $b_1 b_2 \dots b_n \leq 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n$.

5. על הלוח רשום הסכום $\frac{?}{?} + \frac{?}{?} + \dots + \frac{?}{?}$ (בסה"כ 1000 מחוברים). נגזרת ואינטגרל משחקים משחק, כל אחד

בתורו מחליף את אחד מסימני השאלה במספר טבעי שלא נרשם עד כה על הלוח. נגזרת מתחילה ורוצה שהסכום הסופי לא יהיה שלם. אינטגרל מצידו רוצה שהסכום הסופי יהיה שלם. מי מהשחקנים יכול להבטיח לעצמו ניצחון במשחק?

6. איילה וברווז משחקים משחק. הם רושמים שברים מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר n הוא מספר חיובי שלם, על הלוח. המהלך הראשון הוא של איילה. איילה רושמת רק שבר אחד בכל תור, וברווז רושם שבר אחד בתורו הראשון, שני שברים בתורו השני, שלושה שברים בתורו השלישי, וכך הלאה. ברווז רוצה שסכום המספרים על הלוח יהפוך למספר שלם אחרי מספר מהלכים. האם איילה יכולה למנוע את זה?

7. האם ניתן לצבוע את המספרים השלמים החיוביים במספר סופי של צבעים כך שלא כל המספרים יהיו באותו צבע, וכך שאם $a < b$ וגם $a + b = c$, והמספרים a ו- b שונים בצבע, אז גם המספרים b ו- c שונים בצבע?

8. במדינה זרה פעולות החיבור והחיסור מסומנות ע"י "!" ו-"?", אבל לא ידוע איזה סימן מתאים לאיזו פעולה חשבונית. כל פעולה מופעלת על זוג מספרים, אבל במקרה של חיסור לא ידוע—מהו סדר המחוסרים המקובל במדינה (האם מחסרים את המספר השמאלי מהימני או את הימני מהשמאלי).

לדוגמה, הביטוי $a ? b$ מסמל אחד מבין: $b - a$, $a - b$ או $a + b$. כמו כן, לא ידועה צורת הרישום של מספרים שלמים במדינה הזרה, אבל המשתנים a ו- b וסוגריים קיימים ומשתמשים בהם כרגיל. הסבירו כיצד באמצעותם ובאמצעות הסימנים "!" ו-"?" אפשר לכתוב ביטוי שערכו בוודאות $20a - 18b$.

בתאבון!