תרגיל לוח

1. בלוח 8×8 סימנו נקודות כך שבכל שורה ובכל עמודה יש כמות אי-זוגית של נקודות מסומנות. לאחר מכן צבעו את הלוח בצביעת שח. האם יתכן שעל המשבצות הלבנות מונחים כמות אי-זוגית של כלים?

2. לוח משבצות $2n \times 2n$ מרוצף על ידי $2n^2$ אבני דומינו אדומים. שתי משבצות יקראו שכנות אדומות אם הן מכוסות על ידי אותו דומינו אדום. אבני דומינו האדומים הורדו מהלוח והלוח רוצף על ידי $2n^2$ אבני דומינו כחולים. באופן דומה נגדיר שכנים כחולים. התברר שניתן לרשום מספר שלם (ששונה מ-0) בכל אחת ממשבצות הלוח כך שהמספר הרשום בכל משבצת שווה למספר הרשום בשכן האדום שלו פחות המספר הרשום בשכן הכחול שלו. הוכיחו כי n מתחלק ב-3.

3. בכל משבצת של לוח $2m \times 2n$ רשום מספר שלם. בכל שלב ניתן לבחור 3 משבצות של הלוח שיוצרות L-טרומינו ולהוסיף 1 למספרים בשלושת המשבצות. כתלות ב-m, n והמצב ההתחלתי של הלוח קבעו מתי ניתן להגיע למצב שבו כל המספרים הרשומים על הלוח זהים.

4. בחלק ממשבצות של לוח 200×200 עומדים צריחים, חלק מהצריחים לבנים וחלק שחורים. שני צריחים מאיימים זה על זה אם הם מצבעים שונים ואם הם נמצאים באותה שורה או אותה עמודה (גם אם ביניהם עומד צריח אחר). ידוע שכל צריח מאוים על ידי בדיוק חמישה צריחים. מצאו את הכמות המקסימלית של צריחים שיכולים לעמוד על הלוח.

5. בלוח 100×100 סומנו משבצות. מצאו את ה-k המינימלי, עבורו תמיד ניתן לסמן לכל היותר עוד k משבצות, כך שבכל שורה ובכל עמודה יהיו כמות זוגית של משבצות.

6. מה הכמות המירבית של משבצות שניתן לסמן בלוח 100×100 כך שבכל ריבוע 3×3 בלוח, יש לכל היותר 2 משבצות מסומנות.

7. בלוח משבצות $n \times n$, כל משבצת נצבעה בשחור או לבן, כך שאין ריבוע 2×2 שכל המשבצות שלו צבועות באותו הצבע. סדרת משבצות $x_1, \dots, x_m$ תיקרא נחש באורך m, אם לכל $1 \le i < m$ המשבצות x_i, x_{i+1} שכנות לפי צלע, וצבועות בצבעים שונים. מה הוא ה-m הגדול ביותר כך שניתן להבטיח שקיים נחש באורך m על הלוח?

8. בכל משבצת של לוח $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ רשום "1" או "-1". לוח יקרא מוצלח אם מתקיים שהמספר שרשום בכל משבצת שווה למכפלת המספרים הרשומים במשבצות השכנות לפי צלע. חשבו את כמות הלוחות המוצלחים כתלות ב-n.

9. צריח צולע שמסוגל לעבור כל פעם רק למשבצת סמוכה, עבר על כל משבצת של לוח שח 8×8 פעם אחת בדיוק וחזר למשבצת ההתחלתית. האם יתכן שכמות המהלכים האופקיים אותם עשה שווה לכמות המהלכים האנכיים?

10. נתון לוח $3m \times 3m$. נגיד על שקבוצת משבצות שהיא "חוסמת", אם לא קיים מסלול בין הפינה השמאלית התחתונה לימנית העליונה, שמתקדם רק למעלה ולמטה בין משבצות סמוכות בצלע, כך שהוא לא עובר במשבצות מהקבוצה. נגיד שקבוצת משבצות היא "חוסמת מינימלית" אם היא קבוצה "חוסמת" שלא מוכלת בה קבוצה "חוסמת" קטנה יותר.

א. הוכיחו שקיימת קבוצה "חוסמת" מינימלית עם לפחות $3m^2 - 3m$.

ב. הוכיחו שכל קבוצה "חוסמת" מכילה לכל היותר $3m^2$ משבצות.

11. נתון לוח שח $3N \times 3N$ הצבוע בצביעה אלכסונית באדום שחור ולבן. על כל משבצת מוצב אסימון באחד משלושת הצבעים כך שיש בדיוק $3N^2$ אסימונים מכל צבע. ידוע שאפשר לעשות פרמוטציה על האסימונים כך שכל אסימון יעבור מרחק מנהטן D לכל היותר וכל אסימון לבן יעבור למקום שבו היה אסימון שחור, שחור לאדום ואדום ללבן. הוכיחו שאפשר להזיז כל אסימון למרחק $D + 1$ לכל יותר וכך שכל אסימון יעבור למשבצת בצבע המתאים.