בדיקת מקרים

מבוא

הרעיון המרכזי הוא כזה – בוא ניקח נקודה בציור ונזיז אותה, ונראה איך הציור משתנה. התנאי שצריך להוכיח הוא איזשהו פולינום (בדרך כלל) בנקודה שזזה, ולכן אם נבדוק מספיק מקרים פרטיים נוכל להוכיח שהוא מתקיים תמיד.

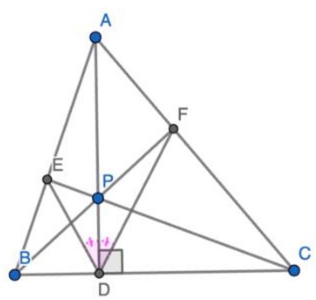
בוא נתחיל מדוגמא פשוטה:

<u>דוגמא:</u> במשולש ABC חוצי הזוויות B, C פוגשים את הצלעות הנגדיות ב-E, F. תהי X על EF. הוכיחו שסכום המרחקים המכוונים מ-X לצלעות מתאפס.

<u>פתרון</u>: התנאי שצריך לבדוק הוא לינארי ב-X ו-X זז על ישר אז מספיק לבדוק שהטענה נכונה ב-2 נק' ואז נקבל שהיא נכונה תמיד. נבדוק את E, F, בהן זה מתקיים באופן טריוויאלי. מש"ל.

מקרה ממש נפוץ הוא שדברים זזים פרויקטיבית. העתקה פרויקטיבית מישר לישר (או מישר לשניוניות וכו') נקבעת על ידי 3 נקודות. לכן אם מה שצריך להוכיח זה ששתי העתקות פרויקטיביות הן אותו דבר, מספיק לבדוק ב-3 נק'.

<u>דוגמא</u>: במשולש ABC עקב הגובה מ-A הוא D ותהי P נקודה על הגובה. הישרים BP, CP חותכים את הצלעות AC, AB ב-E, F (בהתאמה). הוכיחו כי הגובה AD הוא חוצה הזווית של EDF.



<u>פתרון:</u> נזיז את P על הגובה. נשים לב ש-E היא ההטלה של P דרך A מהגובה ל-AC. לכן ההעתקה $P \to E$ פרויקטיבית. בדומה, ההעתקה $P \to F$ פרויקטיבית. לכן למעשה ההעתקה $E \to F$ פרויקטיבית. מצד שני, ההעתקה ששולחת את E לישר DE (עיפרון הישרים דרך A) ואז שיקוף ל-DF ואז לחתוך עם AB כדי לקבל את F היא גם פרויקטיבית, כי היא הרכבה של העתקות פרויקטיביות. לכן אם נוכיח שהטענה נכונה ב-3 מקרים שונים של P, נקבל ששתי ההעתקות $E \to F$ מתלכדות תמיד, ונקבל מש"ל. נקודות שקל לבדוק בהן הן למשל $P = A, D, H$. □

<u>הערה</u>: יש גם פתרון קל עם רביעיות הרמוניות. בעצם צריך להוכיח ש-$(BC, DP; DE, DF)$ רביעייה הרמונית, פשוט נחתוך עם EF ואז נטיל דרך A על BC וזה צ'בה מנלאוס.

תזכורת פרויקטיבית קצרה

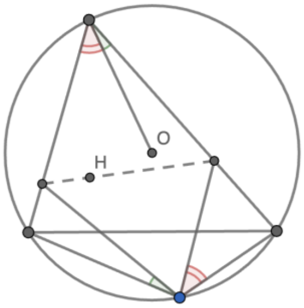
הדברים הבאים הם ישר פרויקטיבי (במובן שאפשר להגדיר עליהם יחס כפול שמתנהג טוב):

- ישר
- שניונית
- אוסף הישרים דרך נקודה (עיפרון ישרים)

הדברים הבאים הם העתקות פרויקטיביות:

- הזזה והומותטיה מישר לעצמו
- סיבוב/שיקוף מעיפרון ישרים לעצמו
- בהינתן ישר ℓ ונקודה P, ההעתקה $X \mapsto PX$ מ-ℓ לעיפרון של P
- הטלה בין שני ישרים (נובע מהקודם)
- הטלה מישר לשניונית דרך נקודה על השניונית
- הטלה משניונית לעצמה דרך נקודה לא על השניונית
- העתקה משניונית לישר משיק לה ℓ שלוקחת בכל נקודה את המשיק וחותכת עם ℓ

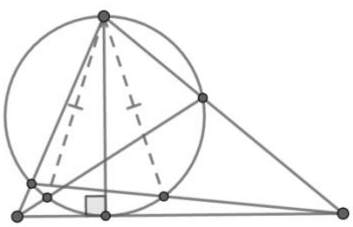
בואו נפתור את כל השאלות הקלות בדף ☺



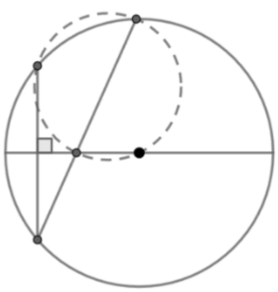
שאלה. משולש ABC חסום. נק׳ P על הקשת $\widehat{BC}$. נק׳ E,F נבחרו על AB,AC כך ש-$\angle APE=\angle BAO$ וכנ״ל בצד השני. אז E,H,F ישר.

פתרון. נזיז את P. נשים לב שההעתקה $P\to E$ היא למעשה הטלה מנק׳ קבועה, וכך גם $P\to F$. למעשה קצת יותר נוח להגיד ש-$E\to P$ פרויקטיבית ואז $E\to P\to F$ פרויקטיבית. מצד שני, גם הטלה דרך H זה פרויקטיבי. לכן מספיק לבדוק שההעתקות מתלכדות ב-3 נק׳. נבדוק ב-B,C,A. ב-A הכל מתלכד ו-$E=F=A$. ב-B,C אחת הנק׳ היא הקודקוד והשנייה עקב הגובה. באופן כללי, טיפ טוב כדי להבין מקרים מנוונים זה לעבוד לפי ההגדרה שלנו של ההעתקה עם הטלות.

שאלה. במשולש ABC עקב הגובה מ-A הוא D. המעגל שקוטרו AD חותך את הצלעות AB,AC ב-F,E בהתאמה. הישרים BE,CF חותכים את המעגל פעם שנייה ב-U,V. צ״ל $AU=AV$.



פתרון. נזיז את C על BC (ונשמור את A,D,B במקום). אז E זז פרויקטיבי על המעגל (הטלה דרך A מ-BC למעגל) ולכן גם U זז פרויקטיבי (הטלה דרך B מהמעגל לעצמו). בנוסף V זו פשוט הטלה מ-BC למעגל דרך הנקודה הקבועה F. אז בעצם ההעתקה $U\to E\to C\to V$ פרויקטיבית וצריך להראות שהיא שווה גם לשיקוף ביחס ל-AD, אז מספיק לבדוק ב-3 נק׳. נבדוק את D,∞ ואת המקרה שבו D אמצע BC (משולש שווה שוקיים). מש״ל



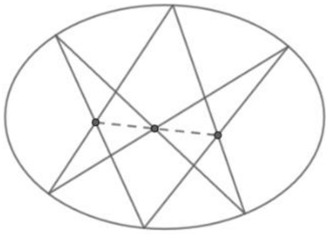
שאלה. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הנק׳ B' היא השיקוף של B ביחס לישר ℓ שעובר ב-O. הנק׳ P היא החיתוך של AB,ℓ. אז A,O,P,B' מעגל.

הערה: זה כמובן טריוויאלי מחשבון זוויות.

פתרון ראשון. נזיז את ℓ (ונקבע את O,A,B ואת המעגל). אז P זז פרויקטיבית. נטען שנק׳ החיתוך של המעגל APO עם המעגל הנתון Ω גם זזה פרויקטיבית, ונוכיח שזה מתלכד עם B'. אם נעשה אינברסיה מ-A אז נקבל שהישר AB עובר לעצמו ו-P' עדיין זזה פרויקטיבית עליו. אבל עכשיו המעגל APO הוא ישר דרך הנק׳ הקבועה O' והחיתוך שלו עם המעגל השני עובר להיות נק׳ שזזה פרויקטיבית על הישר Ω'. לכן גם לפני אינברסיה זה פרויקטיבי. אז נבדוק בנק׳ שבהן מתקיים $P=B,P=A,OP\perp AB$.

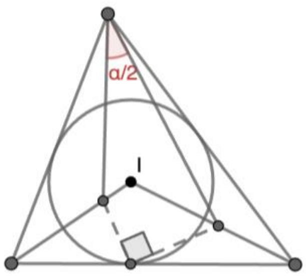
פתרון שני. נקבע את OP ונזיז את A. אז גם B זז פרויקטיבית וגם כאן אינברסיה תוכיח ש-$APO\cap\Omega$ זז פרויקטיבית, ונוכל לבדוק ב-3 נק׳. נבדוק את החיתוכים $\ell\cap\Omega$ ואת הנק׳ כך ש-$OP\perp AB$.

שאלה. משפט פסקל.

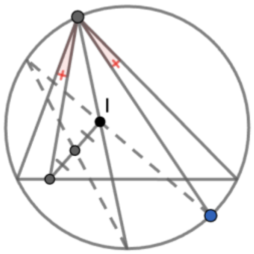


פתרון. נסמן את הנק׳ $ABCXYZ$. נזיז את A. אז $AY\cap BX, AZ\cap CX$ זזים פרויקטיבית על BX,CX, וצריך להראות שההעתקה ביניהן זו בעצם הטלה דרך $BY\cap CZ$. מספיק לבדוק 3 מקרים. נבדוק ב-X,B,C ונסיים. מש״ל

שאלה. במשולש ABC, I הוא מרכז המעגל החסום. נבחרו P,Q על BI,CI כך ש-$\angle PAQ=\frac{1}{2}\angle BAC$. תהי D נק׳ ההשקה של המעגל החסום עם BC. אז $\angle PDQ=90^\circ$.



פתרון. ההעתקה $P \to AP \to AQ \to Q$ פרויקטיבית. גם $P \to DP \to DQ \to Q$ פרויקטיבית (כשההעתקה באמצע היא סיבוב ב-$90°$). לכן נבדוק ב-3 נק׳. ממש טריוויאלי לבדוק ב-$P = A, P = I$. המקרה האחר שדי קל לבדוק הוא כש-P, Q הם מרכזי המעגלים החסומים של ABD, ACD (חשבון זוויות מראה שזה מקרה חוקי).



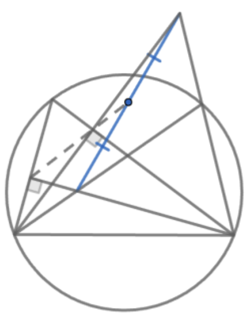
שאלה. (IMO2012/2) משולש ABC, AI חותך ב-D, לוקחים E על הקשת ומשקפים את AE ביחס ל-AI כדי לקבל AF כש-F על BC. אם G אמצע FI אז EI, DG נחתכים בנקודה.

פתרון. נזיז את E. אז F זז פרויקטיבית ולכן G זז פרויקטיבית על הישר שהוא הומותטיה חצי של BC מ-I. לכן DG זז פרויקטיבית וגם EI זז פרויקטיבית, צריך לבדוק 3 נק׳ כדי לראות שהם מתלכדים על המעגל. קל לבדוק את $E = A, D$. המקרה האחר הוא $E = B$ ושם צריך להראות ש-D, אמצע הקשת AC, ואמצע הקטע CI על ישר. זה נובע מתלתן - C, I הן נקודות החיתוך של שני מעגלים שמרכזיהם D ואמצע הקשת AC.

רעיונות מתקדמים יותר

העתקות לינאריות

איך אפשר להתמודד עם אמצעי קטעים? ההבחנה העיקרית היא שאם A, B זזות לינארית, אז $\frac{A+B}{2}$ גם. כלומר, אם יש העתקה לינארית $f: \ell_1 \to \ell_2$ (כלומר העתקה פרויקטיבית שמעבירה את אינסוף לאינסוף) אז אמצעי הקטעים $Xf(X)$ נמצאים על ישר (וזזים לינארית ב-X).



שאלה. במשולש ABC, הנקודה P נמצאת על המעגל החוסם. הישר AP חותך את הגובה מ-B ב-X. הישר BP חותך את הגובה מ-A ב-Y. אז אמצע XY נמצא על DE (ישר עקבי הגבהים).

פתרון. נזיז את P. אז X, Y זזות פרויקטיבית על הגבהים. ננסה להבין את ההעתקה הזו - קל לראות שאינסוף עובר לאינסוף (זה מתי ש-P נגדית ל-A), ולכן נסיק שההעתקה $X \to Y$ לינארית. לכן אם X זז לינארית גם $\frac{X+Y}{2}$ ולכן מספיק לבדוק ב-2 נק׳ כדי לראות שהישר מתלכד עם EF. קל לבדוק את $P = A$ ואת נק׳ החיתוך של הגבהים עם מעגל.

חיתוך עפרונות

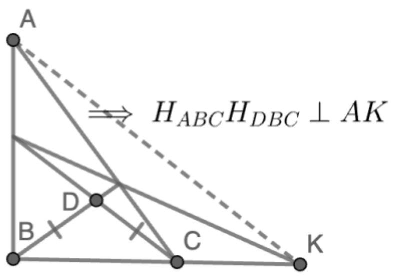
<u>טענה</u>: בהינתן העתקה פרויקטיבית בין זוג ישרים $f: \ell_1 \to \ell_2$, הישרים $Xf(X)$ משיקים לשניונית שמשיקה גם ל-$\ell_1 \ell_2$, אלא אם כן נקודת החיתוך $\ell_1 \cap \ell_2$ עוברת לעצמה ואז כל הישרים הנ״ל עוברים בנקודה קבועה כלשהי. יתר על כן, אם הישרים משיקים לשניונית, ההעתקה $X \to Xf(X)$ היא פרויקטיבית מהישר לשניונית (הדואלית).

<u>הוכחה</u>: בהינתן שניונית שמשיקה ל-ℓ_1, ℓ_2, ההעתקה של להעביר מכל נקודה משיק (שהוא לא ℓ_1) ולראות איפה הוא חותך את ℓ_2) זו הרכבה של שתי העתקות פרויקטיביות (מהישר לנק׳ ההשקה על השניונית ומשם לישר האחר) ולכן פרויקטיבית. ניקח 3 נק׳ X, Y, Z ונתבונן בשניונית שמשיקה ל-5 הישרים $\ell_1, \ell_2, Xf(X), Yf(Y), Zf(Z)$. היא מגדירה העתקה שמתלכדת עם f ב-X, Y, Z ולכן שווה ל-f. לכן f מוגדרת בצורה זו. בנוסף ברור שזה משמר יחס כפול ולכן זה אכן פרויקטיבי.
מתי זה לא עובד? בדיוק כש-$Xf(X), Yf(Y), Zf(Z)$ עוברים בנקודה אחת ואז נק׳ החיתוך עוברת לעצמה.
להיפך, אם נק׳ החיתוך עוברת לעצמה, ניקח שני ישרים $Xf(X), Yf(Y)$, וניקח את נק׳ החיתוך שלהם P. אז ההטלה מ-P מתלכדת עם f ב-$X, Y, \ell_1 \cap \ell_2$ ולכן הן שוות. □

<u>טענה דואלית</u>: בהינתן העתקה פרויקטיבית בין שני עפרונות דרך A, B, נק׳ החיתוך $\ell f(\ell)$ נמצאות על שניונית שעוברת ב-A, B, אלא אם כן הישר AB עובר לעצמו ואז כל הנק׳ הנ״ל נמצאות על ישר אחד. יתר על כן, עם הנק׳ על השניונית אז ההעתקה מעפרון הישרים בנק׳ לשניונית היא פרויקטיבית.

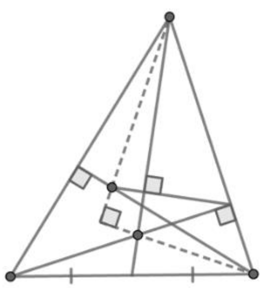
בואו נראה איך זה פותר שאלות.

שאלה. יהי ABC משולש ו-D על האנך האמצעי של BC. הישרים BD, CD חותכים את AC, AB ב-E, F בהתאמה. הישר EF חותך את BC ב-K. צריך להוכיח ש-$AK \perp H_{ABC}H_{DBC}$.



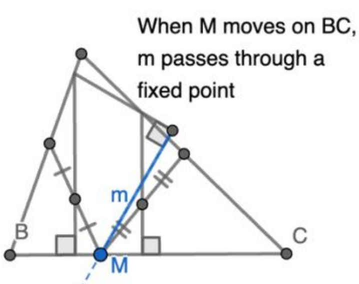
פתרון. נזיז את D. אז E, F זזות פרויקטיבית ולכן לפי טענת העפרונות EF משיק לשניונית. נרצה להבין אם ההעתקה ל-K גם פרויקטיבית. נשים לב שכש-D אמצע הצלע, $EF = BC$ ולכן השניונית משיקה ל-BC, ולכן נקבל שההעתקה ל-K היא לקחת את הישר המשיק EF ולחתוך עם משיק קבוע BC ולכן פרויקטיבית. לכן K זז פרויקטיבית ולכן גם AK ולכן גם הכיוון שלו ולכן גם הכיוון המאונך. (הסבר אולי יותר פשוט לזה ש-K זז פרויקטיבי זה ש-$AD \cap BC$ זז פרויקטיבי ואז מצ׳בה מנלאוס K זה המשלים לרביעייה הרמונית.)
כעת נרצה להבין את הכיוון של $H_{ABC}H_{DBC}$. נשים לב ש-H_{DBC} הוא החיתוך של האנך מ-B ל-DC עם האנך האמצעי של BC, ולכן זו העתקה פרויקטיבית – זה בעצם ההעתקה $C \to CD \to \infty_{CD} \to \infty_{CD^\perp} \to B\infty_{CD^\perp} = BH_{BCD}$.
לכן הכיוון של $H_{ABC}H_{DBC}$ זז פרויקטיבית ולכן צריך לבדוק שהטענה נכונה ב-3 נק׳. נבדוק מתי ש-D יוצא על הצלעות ונסיים.

שאלה. AM תיכון ב-ABC. הגובה CF חותך אותו ב-Z. האנך מ-F לתיכון חותך את הגובה BE ב-Y. צריך להוכיח ש-$AY \perp BZ$.



פתרון. לא כזה ברור מה להזיז, אבל בגלל שיש לנו ישרים מ-A, B אז נבחר להזיז את C על CF. אז M זז פרויקטיבית (הומותטיה חצי מ-B) ולכן $C \to M \to AM \to Z \to BZ$ זז פרויקטיבית.
בנוסף $AM \to \infty_{AM} \to F\infty_{AM} \to FY$ גם פרויקטיבי. הגובה BE גם זז פרויקטיבית (כי זה $C \to AC \to \infty_{AC} \to \infty_{AC^\perp} \to B\infty_{AC^\perp} = BE$ ולכן נקבל ש-$Y = BE \cap FY$ זז על שניונית שעוברת ב-B, F. ננסה להבין אותה. נשים לב שכש-C הולך לאינסוף, אז בעצם שני הישרים מתלכדים ל-BF, ולכן לפי טענת העפרונות נקבל ש-Y זז על ישר. לכן יש לנו למעשה את AY, BZ שזזים פרויקטיבית וצריך להוכיח שהם מאונכים, אז אפשר לבדוק ב-3 נק׳. נשים לב שאת ∞ אי אפשר באמת לבדוק. אז נבדוק את $C = F$ ואת שתי הנק׳ שבהן $AC = AB$ (החיתוכים של הישר CF והמעגל עם מרכז A ורדיוס AB).

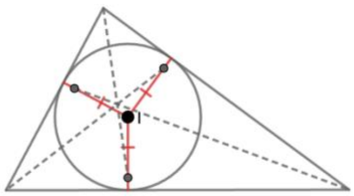
שאלה. נתון משולש ABC, ונקודות F, E על AB, AC. תהא M נקודה על BC. נסמן ב-P, Q את אמצעי ME, MF. האנכים מ-P, Q ל-BC פוגשים את AC, AB ב-X, Y. צריך להוכיח שכש-M זזה על BC, האנך מ-M ל-XY עובר בנקודה קבועה.



פתרון. נזיז את M. אז $M \to X, M \to Y$ פרויקטיבי. לכן $X \to Y$ פרויקטיבי ולכן XY משיק לשניונית. נשים לב שאינסוף עובר לאינסוף ולכן השניונית היא פרבולה, ובפרט החיתוך של XY עם אינסוף זו העתקה של חיתוך עם משיק קבוע ולכן $M \to \infty_{XY}$ פרויקטיבי. לכן גם $M \to \infty_{XY}^{\perp}$ פרויקטיבי. זו העתקה מ-BC לישר האינסוף, ורוצים להראות שבעצם כל הישרים $Mf(M)$ עוברים בנק׳ – לכן לפי טענת העפרונות מספיק להבין שנק׳ החיתוך $BC \cap \infty = \infty_{BC}$ עוברת לעצמה וזה קל לבדוק. מש״ל

ספירת דרגות

שאלה. במשולש ABC מרכז המעגל החסום הוא I ונק׳ ההשקה שלו עם הצלעות הן D,E,F. נק׳ X,Y,Z נבחרו על ID,IE,IF כך ש-$IX=IY=IZ$. אז AX,BY,CZ נחתכים בנקודה.



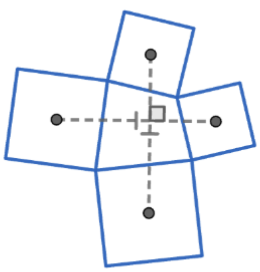
פתרון ראשון. נזיז את X,Y,Z באופן לינארי. כלומר, ניתן להם פרמטריזציה שלינארית באיזשהו פרמטר t (למשל $X=tI+(1-t)D$ וכו׳). נשים לב שהמשוואות של הישרים AX,BY,CZ גם ישתנו בצורה לינארית (כלומר המקדמים שלהן). התנאי ש-3 הישרים נפגשים בנקודה הוא תנאי שהדטרמיננטה של המשוואות מתאפסת. כלומר, זהו פולינום ממעלה 3 ב-t. לכן מספיק לבדוק שהוא מתקיים ב-4 נק׳. נבחר את הנקודות הבאות: $IX=0, IX=\infty, IX=r$ ונוסיף גם את $IX=-r$ שגם הוא קל (כי אז הישרים עוברים בנק׳ השקה של המעגלים החסומים מבחוץ).

פתרון שני. נתבונן בחיתוך הישרים AX,BY. הוא מגדיר שניונית שעוברת ב-A,B. מצד שני חיתוך הישרים AX,CZ מגדיר שניונית שעוברת ב-A,C. אנחנו בעצם רוצים להוכיח שזה מתלכד, אז צריך למצוא 4 נק׳ משותפות (חוץ מ-A). אותן 4 נק׳ שבדקנו בסעיף הקודם עובדות.

<u>הערה</u>: נשים לב שבעצם הוכחנו שהשניונית הזו עוברת ב-A,B,C,I,G,N,H ובפרט יש כאן שבע נק׳ על שניוניות (והיא גם היפרבולה ישרה). בעצם, מי שמכיר את השניונית הזו בלי קשר (אפשר להוכיח ע״י הצמדה איזוגונלית – ההצמדה של שניונית דרך A,B,C היא ישר, והוא עובר ב-I,O, ובעצם צריך להוכיח שהצמודים של ז׳רגון ונאגל על OI), יכול היה לסיים את הפתרון ככה – עבור A,B מצאנו את A,B,I,G,N ולכן זו השניונית הזו ולכן זה מתלכד עם זאת של A,C (לא צריך לבדוק את H).

לינארית

שאלה. על צלעות מרובע $ABCD$ בנו ריבועים שמרכזיהם P,Q,R,S. הוכיחו כי PR,QS שווים באורכם ומאונכים זה לזה.

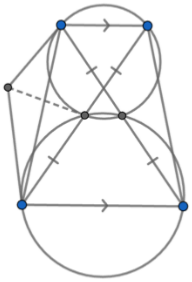


פתרון. נשים לב ש-P,Q,R,S נקבעים ע״י פונקציה לינארית ב-A,B,C,D (8 פרמטרים סה״כ). בנוסף התנאי שצריך להוכיח הוא ש-$(Q-S)=M\cdot(P-R)$ כאשר M מטריצת סיבוב ב-$90°$, ובפרט זה תנאי לינארי (אפשר לרשום גם $(Q-S)=i(P-R)$). לכן מספיק לבדוק אותו על בסיס למרחב של A,B,C,D, כלומר בעצם רק את המקרה $A=B=C=(0,0), D=(0,1)$. במקרה זה הציור ממש טריוויאלי.

שאלות נוספות

שאלה. ($RMM\ 2019/2$) בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ $(AB||CD)$ אמצעי האלכסונים AC,BD הם E,F. המשיק למעגל החוסם של ABE ב-A ולמעגל החוסם של CDE ב-C נפגשים ב-P. אז PE משיק למעגל החוסם של CDE.

פתרון ראשון. נבין מחשבון זוויות שמספיק להוכיח את הטענה הבאה (שנשתמש בה במשולש EAD עם התיכון EF): אם ABC משולש ו-X על התיכון, אז המשיקים ב-B,C למעגלים החוסמים של ABX,ACX נחתכים על התיכושקף. טענה זו נוכיח על ידי להזיז את X. קל לראות מאינברסיה/חשבון זוויות שהמשיקים ב-B,C זזים פרויקטיבית. אבל כש-$X=A$ אז נקבל ש-BC הוא משיק משותף כלומר עובר לעצמו ולכן חיתוך המשיקים למעשה על ישר. כדי לבדוק שהוא יוצא על התיכושקף צריך שתי נקודות – אפשר לקחת את אמצע הצלע ואת החיתוך עם המעגל החוסם.



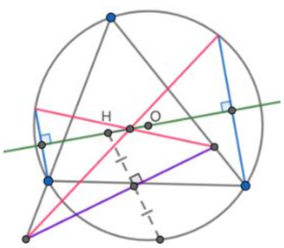
פתרון שני. נזיז את B,D ונשאיר את A,C במקום (ולכן גם את E). המשיק ב-A למעגל ABE זז פרויקטיבית (למשל מאינברסיה/חשבון זוויות). מצד שני, המשולש של המשיקים מ-D,E ל-CDE תמיד דומה לעצמו (חשבון זוויות), אז אם נסמן את חיתוך המשיקים האלה ב-P', נקבל שההעתקה $D\to P'$ היא העתקה ספירלית עם מרכז ב-C ובפרט פרויקטיבית. לכן הישר AP' גם זז פרויקטיבית, וצריך להוכיח שהוא מתלכד עם

המשיק. אז נבדוק ב-3 נק׳. המקרים הממש קלים הם $B = \infty$ והמקרה ש-$ABCD$ מלבן. המקרה ש-$A = B$ או $C = D$ גם קלים (עושים אינברסיה בקודקוד שהתלכד).

פתרון שלישי (רביעיות הרמוניות). נשים לב מסימטריה שאם השאלה נכונה אז PF אמור להשיק למעגל החוסם של ABE. כלומר אם נחתוך את המשיק ל-CDE ב-E עם ABE פעם שנייה ב-X, אז $AFEX$ אמור להיות מרובע הרמוני (וזה שקול לשאלה). נעשה אינברסיה ב-E. אז E אמצע $A'C'$, המעגל $ABEF$ עובר לישר $A'B'F'$ שיש עליו גם נקודה X', והמעגל השני עובר לישר דרך C' שמשיק ל-EX', ו-F' החיתוך שלו עם $A'B'$. אז X' אמצע $A'F'$ ולכן $(A', F'; X', \infty) = -1$ ולכן $(A, F; X, E) = -1$, מש״ל.

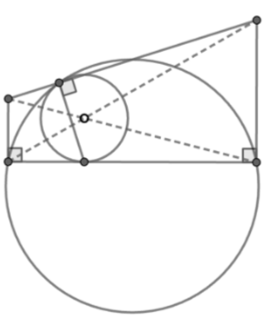
פתרון רביעי (סיבוב). נגדיר את P כחיתוך המשיקים מ-A, F. נעשה סיבוב ב-P שמעביר את A ל-F. זווית הסיבוב היא $\pi - 2\alpha$ כאשר $\alpha = \angle BDA$. נסתכל לאן הסיבוב הזה מעביר את E. זו צריכה להיות נקודה במרחק AE מ-F והכיוון שלה יוצא בדיוק ככה שהיא יוצאת D. לכן PDE משולש שווה-שוקיים עם זווית ראש $\pi - 2\alpha$ שיושב על המשולש CDF שהזווית שלו $\angle C = \alpha$, ולכן הוא משולש של זוג משיקים.

שאלה. יהיו B', C' השיקופים של B, C ביחס לישר אוילר. תהא P על ישר אוילר. הישרים PB', PC' חותכים את AC, AB ב-E, F. צריך להוכיח שהשיקוף של H ביחס ל-EF על המעגל החוסם.



פתרון. נזיז את P. אז E, F זזות פרויקטיבית ולכן EF משיק לשניונית. אם השאלה נכונה, EF הוא האנך האמצעי בין H לנקודה על המעגל. כלומר, אם מסתכלים על אנכים אמצעיים בין H לבין נקודות במעגל, זה אמור לעטוף את השניונית שלנו. לכן נוכל להסיק שהשניונית שלנו אמורה להיות האליפסה עם מוקדים H, O שחסומה במשולש, ולמעשה זה שקול לשאלה.
לכן נמצא 5 מקרים בהם EF משיק לאליפסה הזו ונסיים. מטענת העפרונות אנחנו כבר יודעים ש-AB, AC משיקים. צריך למצוא עוד 3 משיקים מתאימים. אם $P = BC \cap e$ אז נקבל ש-$EF = B'C'$ שאכן משיק. אם ניקח את $P = B'C \cap C'B$ אז נקבל את $EF = BC$. נותר למצוא ישר אחד נוסף. ניקח את $P = e \cap AC$. אז $EF = PB'$, והוא בעצם השיקוף של AC ביחס ל-e. אבל e ישר המוקדים של האליפסה לכן הוא ציר סימטריה שלה, לכן אם AC היה משיק גם EF ישיק לאליפסה. מש״ל

שאלה. AB מיתר במעגל Ω. המעגל ω משיק למיתר AB ול-Ω, ונסמן את הנק׳ ההשקה ב-S וב-T בהתאמה. הישר דרך T שמאונך ל-ST חותך את האנכים ל-AB מ-A, B ב-X, Y בהתאמה. צריך להוכיח ש-AX, BY נחתכים במרכז המעגל ω.



פתרון ראשון. נוכיח ש-AX עובר במרכז ω. נזיז את ω (ונשאיר את Ω, A, B קבועים). נבין עכשיו איך כל הנקודות זזות. נשים לב שהאנך ל-TS מ-T עובר בקוטב הצפוני של ω ולכן מהומותטיה גם בקוטב הצפוני של Ω. לכן ההעתקה $T \to X$ היא הטלה ולכן פרויקטיבית. לכן ההעתקה $T \to X \to AX$ פרויקטיבית. אם נסמן ב-I את מרכז ω, אז נרצה להראות ש-AI גם זז פרויקטיבית (כלומר ש-$T \to AI$ פרויקטיבי) ואז לבדוק ב-3 נקודות.

נשים לב ש-$T \to S$ פרויקטיבי כי זו הטלה דרך הקוטב הדרומי של Ω. בנוסף, נשים לב שבעצם מרכזי המעגלים שחסומים ב-Ω ומשיקים ל-AB נמצאים על פרבולה (שהמוקד שלה זה Ω והמדריך שלה מקביל ל-AB). ההעתקה $S \to I$ היא למעשה הטלה דרך האינסוף של הפרבולה, ולכן פרויקטיבית. לכן $T \to S \to I \to AI$ פרויקטיבית ומספיק לבדוק ב-3 נקודות. נבדוק את $T = B$, ואת הקוטב הצפוני והדרומי של המעגל.

<u>הערה:</u> נשים לב שקיבלנו שגם ההעתקה $I \to T$ פרויקטיבית, שזו הטלה בין שתי שניוניות, ולכן קצת מפתיע. באופן כללי, בהינתן שתי שניוניות עם מוקד משותף, כל אחת מהבחירות הרציפות של הטלה דרך המוקד תהיה פרויקטיבית.

הסיבה היא ששתי השניוניות משיקות ל-FI, FJ ולכן אם נצייר אותן כמעגלים הבחירות הרציפות היחידות שיש הן אינברסיה והומותטיה, שתיהן פרויקטיביות.

פתרון שני (קסם הרמוני). נסמן את הקוטב הצפוני של ω ב-N. אז האנך ל-TS דרך T הוא הישר TN. נשים לב ש-A, B רביעייה הרמונית יחד עם הקטבים הצפוני והדרומי של Ω ואם נטיל אותה דרך T נקבל $(A, B; S, TN \cap AB)$ הרמונית. כעת נטיל מ-X על הקוטר SN ונקבל $(AX \cap SN, \infty_{SN}; S, N) = -1$ ולכן AX עובר באמצע SN כלומר במרכז ω.

ספירת דרגות מתקדמת

בשביל לפתור את השאלה הבאה נציג גישה קצת אחרת. נזיז איזושהי נקודה ונסמן ב-t איזשהו "פרמטר זמן". נגיד שנקודה (או ישר) זזה מדרגה k אם הקוארדינטות שלה הן $\big(P(t): Q(t): R(t)\big)$ כאשר P, Q, R הם פולינומים מדרגה k לכל היותר.

הדוגמה הכי פשוטה זו נקודה שזזה על ישר – קל לראות שאפשר לבחור אותה להיות מדרגה 1 (ולמעשה כל נקודה מדרגה 1 זזה על ישר). באופן דואלי ישר מדרגה 1 זה ישר שעובר בנק' קבועה כלשהי.
מה לגבי שניוניות? מה צריכה להיות דרגה של נקודה כדי שהיא תוכל לזוז על שניונית? ואם יש לי למשל הטלה מישר לשניונית, והנקודה על הישר זזה מדרגה 1 – באיזו דרגה תזוז ההטלה?

הדרך לענות על השאלה הזו היא להיזכר ששניונית היא חיתוך של שני עפרונות פרויקטיביים של ישרים. כלומר שני עפרונות מדרגה 1. אבל החיתוך של שני ישרים הוא מדרגה שהיא סכום הדרגות, ולכן נקבל שנקודה על שניונית זזה מדרגה 2, וגם ההטלה מישר לשניונית נותנת נקודה מדרגה 2.

בעצם הטענה שהשתמשנו בה כאן היא ש-$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$. זו לא טענה מדויקת. הטענה היותר מדויקת היא ש-

$$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) - \#(A = B)$$

אכן, אם $A = \big(P_A(t): Q_A(t): R_A(t)\big)$ ו-$B = \big(P_B(t): Q_B(t): R_B(t)\big)$ אז AB מוגדר ע"י המכפלה הוקטורית, כלומר הקוארדינטות שלו הן $P_A Q_B - P_B Q_A$ וכו'. ואם עבור $t = t_0$ כלשהו A, B מתלכדות אז הפולינום הנ"ל בדיוק מתאפס ב-t_0 ולכן מתחלק ב-$(t - t_0)$.

נשים לב שהמשפט הזה בדיוק מכליל את טענת חיתוך העפרונות – אם חיתוך הישרים עובר לעצמו זה בדיוק נק' שבה $A = B$.

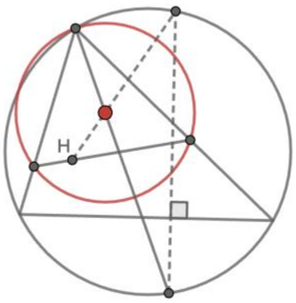
<u>הערה:</u> כשמשתמשים במשפט הזה כדי לפתור שאלה, חשוב לוודא שהנקודות שנבדוק בהן בסוף הן לא הנקודות שהחסרנו בחישוב, כי אז אנחנו בעצם עושים ספירה כפולה.

עוד דבר שכדאי לדעת זה שהתנאי ש-A, B, C על ישר זה תנאי מדרגה $\deg A + \deg B + \deg C$.

בוא נראה איך אפשר להשתמש בזה.

שאלה. משולש ABC חסום במעגל. ישר דרך H חותך את הצלעות AB, AC ב-E, F. יהי K מרכז המעגל החוסם של AEF. הישר AK חותך את המעגל החוסם שוב ב-D. אז הישר HK והאנך מ-D ל-BC נפגשים על המעגל החוסם.

פתרון ראשון. נזיז את D. הוא זז מדרגה 2. נסמן את החיתוך של האנך עם המעגל ב-G. אז גם G זז מדרגה 2. הישר AD זז מדרגה 1 והישר HG זז מדרגה 2. לכן על פניו החיתוך שלהם K זז מדרגה 3. אבל כש-$D = AH \cap \Omega$ אז AD, HG מתלכדים ולכן K זז מדרגה $3 - 1 = 2$. עכשיו צריך להבין את E, F. זה בעצם להטיל את K על AE ולעשות הומותטיה פי 2. על פניו ההטלות הן מדרגה 2, ולכן התנאי שצריך לבדוק (ש-E, H, F על ישר) הוא מדרגה $2 + 2 + 0 = 4$, כלומר צריך לבדוק ב-5 נקודות. אפשר למצוא 5 נקודות, אבל אפשר גם לפשט את זה קצת. בוא ננסה להבין את השניונית ש-K נמצא עליה. נשים לב שאם D הנקודה הנגדית ל-B אז מתקיים $K = \infty_{HC}$ כלומר נק' האינסוף הזו על השניונית ולכן ההטלה האנכית מ-K ל-AB היא בעצם הטלה דרך נקודה על השניונית. לכן E, F למעשה מדרגה 1 ולכן התנאי שצריך הוא מדרגה $1 + 1 + 0 = 2$ וצריך לבדוק ב-3 נק' (למעשה ההעתקה $E \to F$ פרויקטיבית). נבדוק את $D = A, B, C$.



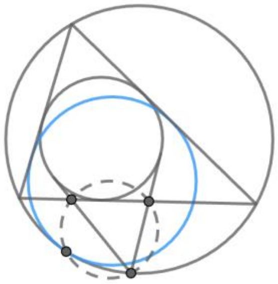
הערה: אפשר היה להזיז גם את הישר EF מלכתחילה, אבל אז זה החישוב יוצא מדרגה 4 וצריך לבדוק 5 נקודות.

פתרון שני (חשבון זויות, בלי בדיקה). נלך הפעם בסדר המקורי. מערך השוויון, נסמן את החיתוך השני של GH עם המעגל החוסם ב-X. מחשבון זוויות, התנאי ש-$GD \perp BC$ שקול לכך ש-E, H, C, X מעגל. אז בעצם נסתכל על חיתוך המעגלים EHC, BHF, וממשפט מיקל על המשולש AEF עם הנק' B, C, H נקבל שהמעגלים האלה נחתכים על המעגל החוסם. נגדיר את זה בתור X'. הישר $X'H$ הוא ציר רדיקלי של שני המעגלים האלה. נראה ש-K נמצא עליו ונסיים. חשבון זוויות קל מראה ש-KE, KF משיקים למעגלים אבל הם שווים ולכן K על הציר הרדיקלי ולכן מש"ל.

פונסלה

שאלה. המשולש ABC חסום ב-Ω וחוסם את ω. מנק' M על Ω העבירו שני משיקים ל-ω, שחותכים את BC ב-X_1, X_2. אז המעגל MX_1X_2 עובר בנק' ההשקה של המעגל החצי-חסום של A (ב-ABC).

פתרון. אפשר היה לנסות להזיז את M, אבל ההעתקה מ-M למשיקים היא לא אלגברית ולכן קשה להבין אותה. במקום זה, נקבע את M, ואת Ω, ω (ולכן גם את המשיקים שנקרא להם ℓ_1, ℓ_2), ונזיז את A. נשים לב שבגלל פונסלה זה באמת אפשרי – תמיד ABC יהיה חוסם-חסום.



נטען שההעתקה $A \to BC$ פרויקטיבית. דרך אחת לראות למה היא לטעון שזו העתקה אלגברית (אכן, זה לא משנה אם מגיעים מימין או משמאל, לכן זה צריך להיות אלגברי – אפשר להפוך את זה לטיעון יותר פורמלי) ולכן חייבת להיות פרויקטיבית. טיעון אחר הוא אינברסיה ביחס למעגל החסום – אם נסמן את נק' ההשקה של הצלעות ב-D, E, F, אז A', B', C' הם אמצעי הצלעות של DEF. בפרט, מעגל תשע הנקודות של DEF הוא האינברסיה של החוסם ביחס לחסום ולכן קבוע. לכן ישר אוילר קבוע וגם מפגש התיכונים M של DEF קבוע. לכן יש העתקה שהיא $A \to A' \to D$ שהצעד הראשון הוא אינברסיה והשני הוא הטלה דרך מפגש התיכונים. לכן $A \to X \to BC$ פרויקטיבי.

אז ראינו ש-$A \to BC$ פרויקטיבית. בפרט $A \to X_1, A \to X_2$ פרויקטיביות (כי $BC \to BC \cap \ell_i$ פרויקטיביות כי כל הישרים הנ"ל משיקים לחסום).

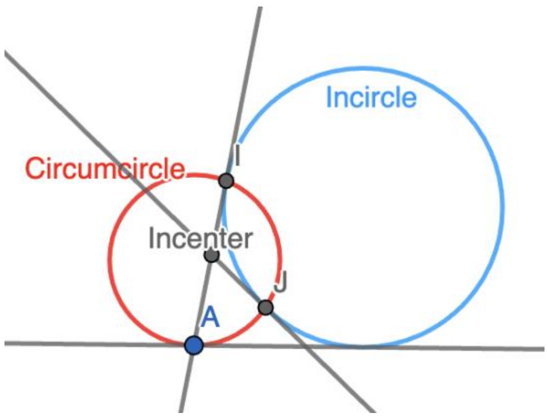
נרצה להבין כעת את $A \to T$ כאשר T נק' השקה של החצי חסום. נשים לב שלפי מונג', A, T ומרכז ההומותטיה מהחסום לחוסם על ישר. כלומר $A \to T$ זו הטלה מהמעגל לעצמו דרך נק' קבועה, ולכן פרויקטיבי.

לכן T, X_1, X_2 זזות פרויקטיבי. אם נעשה אינברסיה ב-M הם אפילו יזוזו פרויקטיבית על ישרים, ונצטרך לבדוק שהם על ישר אחד, כלומר תנאי מדרגה 3. נבדוק ב-4 נק'.

הבדיקה הכי קלה היא $A=M$. מי שאוהב גיאומטריה מוזמן לבדוק גם את המקרים שבהם יוצא $M=B,C$, אבל הם בכל מקרה לא מספיקים אז נצטרך משהו אחר.

נבדוק את המקרה שבו יוצא $M=T$. אז צריך שהמעגל MX_1X_2 ישיק לחוסם. כלומר, יש הומותטיה ממנו לחוסם, ובהומותטיה הזו X_1X_2 יעברו לחיתוכים Y_1,Y_2 של ℓ_1,ℓ_2 עם Ω. מפונסלה Y_1Y_2 משיק ל-ω ובעצם התנאי שלנו שקול לכך שהמשיק הזה מקביל ל-BC. נשים לב שבציור הזה אם היינו בוחרים את A כך ש-M היה יוצא החיתוך של החוסם עם אחד המשיקים מ-T לחסום, היינו גם מקבלים טענה נכונה, לכן אם נדע להוכיח את זה נקבל בבת אחת 3 נקודות.

לסיכום, יש לנו שאלה חדשה – מעבירים שני משיקים TP,TQ מנק׳ ההשקה של החצי-חסום של A. צריך להוכיח $PQ||BC$. נשים לב ש-$PQ\to T\to A\to BC$ פרויקטיבי לפי הדברים שהסברנו, ומצד שני שיקוף ביחס למרכז המעגל הוא גם פרויקטיבי. לכן מספיק לבדוק ב-3 נק׳ ☺ קל לראות שכש-A על OI זה קל. זה נותן שני מקרים. המקרים הנוספים שקל לבדוק זה כש-$A=T$. אכן, זה קורה בדיוק כשהישר ממרכז הומותטיה משיק למעגל. קל לראות שלפי פונסלה במקרה זה במשולש מתקיים $A=B$ ו-C היא אחת מנק׳ החיתוך של המעגלים כלומר I,J (טכנית צריך להסביר שזה לא החיתוכים האחרים – נתעלם מזה אבל בעיקרון זה לא באמת פתרון מלא). לכן הישר BC הוא משיק ב-Y וזה גם בדיוק הישר PQ ואכן הטלה ממרכז המעגל (חיתוך המשיקים ב-I,J) תעביר את נק׳ ההשקה של הישר הזה לעצמו.



עוד אקסטרה שאלות (שלא נכנסו לתרגיל)

1. (משפט הפרפר) XY הוא מיתר במעגל Ω, ו-M אמצע XY. נתונים שני מיתרים נוספים AB, CD שעוברים ב-M. נסמן $P = AC \cap XY, Q = BD \cap XY$. צ״ל $MP = MQ$.
2. משולש ABC חסום במעגל. נק׳ X על המשיק ב-A. M, N אמצעי AB, AC. מעבירים מעגל CN שמשיק ל-NX ומעגל BM שמשיק ל-MX. צ״ל שהמעגלים נחתכים על BC.
3. אמצעי הקשתות $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ הם F, E בהתאמה. נקודה P נבחרת על הקשת $\widehat{BC}$. הישרים PE, PF חותכים את CF, BE ב-Z, Y. נסמן ב-M את אמצע XY. אז AY, EM נחתכים על המעגל החוסם.
4. שני מעגלים נחתכים ב-A, B. לוקחים נק׳ P, Q (כל אחת על מעגל האחר) כך ש-$\angle PAB = \angle QAB$. אז המעגלים APQ עוברים בנק׳ אחת.
5. במשולש ABC, עקבי הגבהים מ-A, B הם D, E. הישר דרך D שמאונך ל-DO חותך את הישר דרך A ואמצע DE בנק׳ K. צריך להוכיח ש-$CK \perp AO$.
6. במשולש ABC נסמן את אמצעי הצלעות ב-M_A, M_B, M_C, את מרכז המעגל החוסם ב-O, ואת מפגש הגבהים ב-H. תהי S נק׳ על OH. נסמן את החיתוכים השניים של M_AS, M_BS, M_CS עם המעגל $(M_AM_BM_C)$ ב-X, Y, Z בהתאמה. אז AX, BY, CZ נפגשים בנקודה.
7. (Droz-Farny) העבירו דרך H שני ישרים מאונכים. הם חותכים את הצלעות ב-$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. אז אמצעי A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 על ישר.

פתרונות לשאלות הנוספות

בעמוד הבא.

שאלה. (משפט הפרפר) XY הוא מיתר במעגל Ω, ו-M אמצע XY. נתונים שני מיתרים נוספים AB, CD שעוברים ב-M. נסמן $P = AC \cap XY, Q = BD \cap XY$. צ"ל $MP = MQ$.

פתרון. נזיז את A (ו-B יזוז בהתאים). ההעתקות $A \to AC \to P, A \to B \to BD \to Q$ פרויקטיביות, וצריך להוכיח ש-$P \to Q$ מתלכד עם שיקוף. נבדוק את $A = X, A = Y, A = C$.

שאלה. משולש ABC חסום במעגל. נק' X על המשיק ב-A. M, N אמצעי AB, AC. מעבירים מעגל CN שמשיק ל-NX ומעגל BM שמשיק ל-MX. צ"ל שהמעגלים נחתכים על BC.

פתרון. נזיז את X. נטען שההעתקה מ-X לחיתוך המעגל (אחד מהם) עם BC זה פרויקטיבי ואז נבדוק ב-3 נק'. פרויקטיביות נובעת מחשבון זוויות (זה סיבוב בזווית קבועה של הישרים ב-N) או מאינברסיה. לבדוק אפשר ב-A, ∞ ובחיתוך של MN והמשיק.

שאלה. אמצעי הקשתות $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$ הם F, E בהתאמה. נקודה P נבחרת על הקשת $\widehat{BC}$. הישרים PE, PF חותכים את CF, BE ב-Z, Y. נסמן ב-M את אמצע XY. אז AY, EM נחתכים על המעגל החוסם.

פתרון. נזיז את P. אז X, Y זזים פרויקטיבית על חוצי הזווית. נשים לב שאינסוף עובר לאינסוף (זה מתי ש-P קוטב צפוני). לכן ההעתקה X, Y לינארית, לכן M זז לינארית אם X זז לינארית. אז בעצם נזיז את X ולא את P, ונקבל ש-M, Y זזות לינארית, ומספיק לבדוק ב-3 נק'. קל לבדוק את $P = B, A$. ב-C זה נובע מתלתן.

שאלה. שני מעגלים נחתכים ב-A, B. לוקחים נק' P, Q (כל אחת על מעגל האחר) כך ש-$\angle PAB = \angle QAB$. אז המעגלים APQ עוברים בנק' אחת.

פתרון. נעשה אינברסיה, נקבל שאלה על העתקה פרויקטיבית בין ישרים דרך B', היא מעבירה את B' לעצמה לכן באמת זה הטלה מנקודה, מש"ל.

שאלה. במשולש ABC, עקבי הגבהים מ-A, B הם D, E. הישר דרך D שמאונך ל-DO חותך את הישר דרך A ואמצע DE בנק' K. צריך להוכיח ש-$CK \perp AO$.

פתרון. נרצה ש-A, D יישארו במקום. נרצה גם ש-E יזוז לינארית, כדי שאמצע DE יזוז על ישר. לשם כך נקבע את C ונזיז את B. אז באמת E זז לינארית (הטלה מאינסוף) ולכן הישר מ-A לאמצע BE זז פרויקטיבית. נשים לב ש-O זז על האנך האמצעי של AC, והוא החיתוך שלו עם האנך האמצעי של BC שזז לינארית ולכן O זז לינארית. לכן DO פרויקטיבי ולכן הישר המאונך לו גם זז פרויקטיבית. החיתוך שלהם, K, זז על שניונית. נקווה שהיא ישר – כלומר, נרצה לבדוק האם הישר AD עובר לעצמו. המקרה הזה קורה כשהמשולש ישר זווית ב-A, וקל לראות שבאמת K על AD במצב זה, ולכן K זז על ישר. לכן CK, AO זזים פרויקטיבית ומספיק לבדוק ב-3 נק'. לא לגמרי טריוויאלי למצוא מקרים קלים לבדוק. הכי קלים שאני מצאתי זה $B = \infty$, המקרה שבו $BD = DC$, ו-?

שאלה. במשולש ABC נסמן את אמצעי הצלעות ב-M_A, M_B, M_C, את מרכז המעגל החוסם ב-O, ואת מפגש הגבהים ב-H. תהי S נק' על OH. נסמן את החיתוכים השניים של M_AS, M_BS, M_CS עם המעגל $(M_AM_BM_C)$ ב-X, Y, Z בהתאמה. אז AX, BY, CZ נפגשים בנקודה.

פתרון. נזיז את S לינארית. אז X, Y, Z מדרגה 2, ולכן AX, BY, CZ מדרגה 2 ולכן השאלה מדרגה 6. נבדוק ב-7 נקודות. קל לבדוק את $OH \cap (M_AM_BM_C)$ – זה שתי נקודות. קל לבדוק את $OH \cap M_AM_B$ – זה עוד 3. קל לבדוק גם את $S = E$ (מרכז מעגל תשע נקודות) ואת $S = M$. מש"ל

שאלה. (Droz-Farny) העבירו דרך H שני ישרים מאונכים. הם חותכים את הצלעות ב-$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. אז אמצעי A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 על ישר.

פתרון. נסובב את הישרים דרך H. אז כל הנק׳ פרויקטיביות ולכן כל האמצעים מדרגה 2 (ממוצע של שתי נק׳ פרויקטיביות הוא מדרגה 2) ולכן התנאי מדרגה 6. נשים לב שהכל בא בזוגות אז יותר קל לבדוק. כשאחד הישרים הוא גובה במשולש זה מקרה קל, וזה נותן לנו 6 נק׳. את הנק׳ הנוספת נקבל מהישר HI (או HJ) כי הוא עובר לעצמו בסיבוב ב-$90°$.