

# קניבלים וזיווגים

1. למחנה מגיעים מספר מדריכים. כל מדריך מגיע פעם אחת ונשאר במחנה כמות כלשהי של זמן. מינק רוצה לבחור מספר זמנים שבהם הוא יוכל לספר למדריכים את הפתרונות לשאלות (כל פעם זה לוקח לו 0 זמן). נתון שמבין כל  $k + 1$  מדריכים, יש לפחות שניים שנמצאים בו זמנית במחנה. הוכיחו שמינק יוכל לספר את הפתרונות רק  $k$  פעמים, וכל המדריכים ישמעו אותם.
2. א. (ארדש-סקרש) הוכיחו כי לכל סדרה של מספרים שונים באורך  $ab + 1$  יש תת-סדרה עולה באורך  $a + 1$  או תת-סדרה יורדת באורך  $b + 1$ .  
ב. האם ניתן לטעון זאת גם לגבי סדרה באורך  $ab$ ?
3. נתון גרף דו צדדי עם  $n$  קודקודים בכל צד. ידוע שבגרף אין זיווג מושלם אבל עבור כל קשת שנוסיף לגרף בגרף החדש יהיה זיווג מושלם. קודקוד יקרא חברותי אם הוא מחובר לכל הקודקוד בצד השני. הוכיחו כי יש בדיוק  $n - 1$  קודקודים חברותיים.
4. נתונים 1001 מלבנים, שאורכי צלעותיהם שייכים לקבוצה  $\{1, 2, \dots, 1000\}$ . הוכיחו כי ניתן לבחור מתוכם שלושה מלבנים  $A, B, C$  כך שניתן לשים את  $A$  בתוך  $B$  ואת  $B$  בתוך  $C$ .
5. טבלה ריבועית מלאה באחדות ואפסים, כך שבכל קבוצת צריחים מקסימאלית הלא מאימים זה על זה מופיע אחד. הוכיחו כי קיימים מספרים שלמים  $i, j$  עבורם  $i + j \geq n + 1$  וקיימות  $i$  שורות ו- $j$  עמודות, כך שכל החיתוכים של  $i$  השורות עם  $j$  העמודות הם אחדים.
6. נתון גרף דו-צדדי, כל צד שלו בגודל  $2n$ . לשני צידי הגרף ולכל  $m \leq n$  מתקיים שכל קבוצה של  $m$  קודקודים מצד זה מקיימת תנאי הול. הראו שיש זיווג מושלם בגרף.

7. בטבלה  $M \geq 3$  שורות ו- $N \geq 3$  עמודות. "מהלך אופקי" זו תמורה של איברי הטבלה שבה כל איבר נשאר באותה שורה בה הוא היה. "מהלך אנכי" מוגדר באופן דומה. מצאו את ה- $K$  הקטן ביותר, כך שאפשר לבצע כל תמורה של איברי הטבלה ב- $K$  מהלכים.

8. יהי  $G$  גרף, ויהי  $\chi(G)$  מספר הצביעה שלו. נניח כי  $G$  נצבע ב- $\chi(G)$  צבעים, כאשר כל שני קודקודים סמוכים צבועים בצבעים שונים. הוכיחו כי יש מסלול ב- $G$  מאורך  $\chi(G)$  כך שכל קודקודיו מצבעים שונים.

9. משפחת קבוצות  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  נקראת *חופשיה מאיחודים* אם לכל  $i, j, k$  שונים,  $S_i \cup S_j \neq S_k$ . הראו כי כל משפחה של  $n$  קבוצות שונות מכילה תת-משפחה חופשיה מאיחודים בעלת לפחות  $\sqrt{n}$  קבוצות.

10. בלוח  $n \times n$ ,  $n$  משבצות נצבעו בכחול כך שכל שתי משבצות צבועות נמצאות בשורות ועמודות שונות. מקל הוא מלבן  $1 \times k$  או  $k \times 1$  כאשר  $1 \leq k \leq n$ . זברה רוצה לרצף את המשבצות הלבנות עם כמות מינימלית של מקלות כך שהמקלות לא נוגעים במשבצות כחולות. כמה מקלות זברה צריכה?

11. משולש יפני הוא מבנה המורכב מ- $1 + 2 + \dots + n$  עיגולים המסודרים בצורת משולש שווה צלעות כך שלכל  $i = 1, \dots, n$ , בשורה ה- $i$  ישנם בדיוק  $i$  עיגולים, מתוכם בדיוק אחד צבוע באדום.

הילוך נינג'ה במשולש יפני הוא סדרה של  $n$  עיגולים המתחילה בשורה העליונה, בכל צעד עוברת מעיגול לאחד משני העיגולים הנמצאים ישירות מתחתיו, ומסתיימת בשורה התחתונה.

מצאו, כפונקציה של  $n$ , את הערך הגדול ביותר של  $k$  עבורו בכל משולש יפני יש הילוך נינג'ה המכיל לפחות  $k$  עיגולים אדומים.