קניבלים

<u>הגדרה:</u> *קבוצה סדורה חלקית* (קס"ח) זו קבוצה S עם יחס $\geq$ שמקיים:

א. רפלקסיביות: $a \leq a$.
ב. אנטי-סימטריות: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.
ג. טרנזיטיביות: $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$.

<u>הגדרה:</u> נתונה קס"ח $(S, \geq)$. שני איברים $a, b \in S$ נקראים *ניתנים להשוואה* אם $a \geq b$ או $b \geq a$. *שרשרת* זו קבוצת איברים כך שכל שניים ניתנים להשוואה. *אנטי-שרשרת* זו קבוצת איברים כך שאף שניים לא ניתנים להשוואה.

<u>*משפט (Mirsky):*</u> בקס"ח, אורך השרשרת המקסימלית שווה למספר האנטי-שרשראות המינימלי הדרוש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הגובה של הקבוצה.*

1. <u>*משפט דילוורת' (Dilworth):*</u> בקס"ח, אורך האנטי-שרשרת המקסימלית שווה למספר השרשראות המינימלי הנדרש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הרוחב של הקבוצה.*

2. <u>*משפט הול (Hall):*</u> יהיה G גרף דו-צדדי, עם צדדים U, V. נניח כי לכל תת-קבוצה $X \subseteq U$ מתקיים $|N(X)| \geq |X|$, כאשר $N(X)$ זו קבוצת השכנים של קודקודים ב-X. אז קיימת התאמה חח"ע שמתאימה לכל קודקוד ב-U שכן שלו ב-V.

3. <u>*משפט קניג (Kőnig):*</u> בגרף דו-צדדי, כמות הקשתות בשידוך מקסימלי שווה לכמות הקודקודים המינימלית הנדרשת כדי לכסות את הקשתות (כלומר לכל קשת יש קודקוד בכיסוי).

מסתבר שמשפטים 1-3 שקולים זה לזה.

תרגיל קניבלים

1. א. (ארדש-סקרש) הוכיחו כי לכל סדרה של מספרים שונים באורך $ab+1$ יש תת-סדרה עולה באורך $a+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $b+1$.
ב. האם ניתן לטעון זאת גם לגבי סדרה באורך ab?

2. נתונה תת-קבוצה אינסופית S של מספרים טבעיים. בדקו אילו מהטענות הבאות בהכרח נכונות:
א. ניתן לבחור או תת-קבוצה אינסופית של S בה אף שני מספרים לא מתחלקים זה בזה, או שאפשר ליצור מתת-קבוצה של S סדרה עולה ממש בה כל מספר מתחלק בקודם.
ב. ניתן לבחור או תת-קבוצה אינסופית של S בה כל שני מספרים זרים, או שאפשר ליצור מתת-קבוצה של S סדרה עולה ממש בה כל מספר מתחלק בקודם.
ג. ניתן לבחור או תת-קבוצה אינסופית של S בה כל שני מספרים זרים, או תת-קבוצה אינסופית של מספרים מ-S שכולם מתחלקים באותו מספר שגדול מ-1.

3. למחנה מגיעים מספר מדריכים. כל מדריך מגיע פעם אחת ונשאר במחנה כמות כלשהי של זמן. מינק רוצה לבחור מספר זמנים שבהם הוא יוכל לספר למדריכים את הפתרונות לשאלות (כל פעם זה לוקח לו 0 זמן). נתון שמבין כל $k+1$ מדריכים, יש לפחות שניים שנמצאים בו זמנית במחנה. הוכיחו שמינק יוכל לספר את הפתרונות רק k פעמים, וכל המדריכים ישמעו אותם.

4. נתונים 1001 מלבנים, שאורכי צלעותיהם שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,1000\}$. הוכיחו כי ניתן לבחור שלושה מלבנים מתוכם A,B,C כך שניתן לשים את A בתוך B ואת B בתוך C.

5. יהי G גרף פשוט, ויהי $\chi(G)$ מספר הצביעה שלו. נניח כי G נצבע בכמות כזו של צבעים. הוכיחו כי יש מסלול ב-G מאורך $\chi(G)$ כך שכל קודקודיו מצבעים שונים.

6. משפחת קבוצות $S=\{S_1,\dots,S_n\}$ נקראת *חופשייה מאיחודים* אם לכל i,j,k שונים, $S_i\cup S_j\neq S_k$. הראו כי כל משפחה של n קבוצות שונות מכילה תת-משפחה חופשייה מאיחודים בעלת לפחות $\sqrt{n}$ קבוצות.

בתאבון!