קניבלים

הגדרה: *קבוצה סדורה חלקית* (קס"ח) זו קבוצה S עם יחס $\geq$ שמקיימים:

א. רפלקסיביות: $a \leq a$.
ב. אנטי-סימטריות: $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$.
ג. טרנזיטיביות: $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$.

הגדרה: נתונה קס"ח $(S, \geq)$. שני איברים $a, b \in S$ נקראים *ניתנים להשוואה* אם $a \geq b$ או $b \geq a$. *שרשרת* זו קבוצת איברים כך שכל שניים ניתנים להשוואה. *אנטי-שרשרת* זו קבוצת איברים כך שאף שניים לא ניתנים להשוואה.

משפט (*Mirsky*): בקס"ח, אורך השרשרת המקסימלית שווה למספר האנטי-שרשראות המינימלי הדרוש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הגובה של הקבוצה*.

1. משפט (*Dilworth*): בקס"ח, אורך האנטי-שרשרת המקסימלית שווה למספר השרשראות המינימלי הנדרש לכיסוי של הקבוצה. מספר זה מכונה *הרוחב של הקבוצה*.
2. משפט (*Hall*): יהיה G גרף דו-צדדי, עם צדדים U, V. נניח כי לכל תת-קבוצה $X \subseteq U$ מתקיים $|N(X)| \geq |X|$, כאשר $N(X)$ זו קבוצת השכנים של קודקודים ב-X. אז קיימת התאמה חח"ע שמתאימה לכל קודקוד ב-U שכן שלו ב-V.
3. משפט (*Kőnig*): בגרף דו-צדדי, כמות הקשתות בשידוך מקסימלי שווה לכמות הקודקודים המינימלית הנדרשת כדי לכסות את הקשתות (כלומר לכל קשת יש קודקוד בכיסוי).
4. משפט (*Menger*): יהי G גרף לא מכוון ויהיו x, y שני קודקודים שונים לא שכנים ב-G. אז מספר הקודקודים המינימלי שיש להסיר מ-G כדי שלא יהיה מסלול בין x ל-y שווה למספר המקסימלי של מסלולים זרים בזוגות (כלומר בלי קודקודים משותפים) בין x ל-y.
5. משפט (*Birkhoff-Von Neumann*): הקמור של מטריצות תמורות (כלומר מטריצות שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק 1 אחד וכל השאר 0) הוא מטריצות דו-סטוכסטיות (כלומר מטריצות שבהן סכום כל שורה וכל עמודה הוא 1).
6. משפט (*זרימה בגרפים*): ברשת זרימה, הזרם המקסימלי שווה לחתך המינימלי.

משפט: המשפטים הקודמים (1-6) שקולים.

הערה: משפטים אלה הם מקרים פרטיים של משפט הדואליות בתכנון לינארי.

משפט שפרנר: אנטי-שרשרת מקסימלית ב-$2^{[n]}$ היא בגודל $\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

מסקנה: תהי P קס"ח עם $mn + 1$ איברים. אז קיימת שרשרת מגודל $m + 1$ או אנטי שרשרת מגודל $n + 1$.

Proof Ideas:

1. *Dilworth*. Induction – remove a pair of comparable maximal and minimal element, take an anti-chain and look at what's above it or below it.
2. *Dilworth → Konig*. Define $u \leq v \Leftrightarrow (u, v) \in E$. Take a maximal anti-chain, and now all the vertices not contained in it form a vertex cover. A matching is a covering by chains.
3. *Konig→Dilworth*. Take two copies of the poset as the graph. Define $u \leq v \Leftrightarrow (u, v) \in E$. Now an anti-chain can be constructed from a vertex-cover by taking elements that correspond to vertices not in the cover on either side, and a cover by chains can be formed from a matching by adding x, y to a chain if the corresponding edge exists.

4. *Dilworth → Hall*. Define $u \leq v \iff (u,v) \in E$. Show that a maximal anti-chain is of size $|V|$. Now take a cover by $|V|$ chains and finish.
5. *Hall → Konig*. Take a minimal vertex-cover $S \cup T$. By Hall we can match $S, V - T$ and $T, U - S$.
6. *Hall → Birkhoff-Von Neumann*. Induction on the number of nonzero entries – show that it is possible to subtract a permutation matrix to create more zero entries.
7. *Sperner* – Hall's theorem on $\binom{[n]}{k}, \binom{[n]}{k+1}$. Second proof: Choose a random permutation. What's the chance that the first elements are from A_i? $\sum \frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leq 1$. Equivalently, count maximal chains containing A_i.

<u>תרגיל קניבלים</u>

1. (Iran 2006) יהי k שלם חיובי, ויהי S אוסף סופי של קטעים בישר. נניח כי בין כל $k+1$ קטעים, יש שניים שנחתכים. הוכיחו כי קיימת קבוצה של k נקודות בישר שנחתכת עם כל קטע ב-S.

2. (ארדש-סקרש) הוכיחו כי לכל סדרה באורך $ab+1$ יש תת-סדרה עולה באורך $a+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $b+1$.

3. (Romanian TST 2006) יהיו m ו-n שלמים חיוביים, ותהי $S \in \{1,2,3,\dots,2^m n\}$ תת-קבוצה בגודל $(2^m-1)n+1$ איברים. הוכיחו כי S מכילה $m+1$ מספרים שונים $a_0,a_1,\dots,a_m$ כך ש-$a_{k-1}|a_k$ לכל $k=1,2,\dots,m$.

4. (Slovak Competition 2004) נתונים 1001 מלבנים, שאורכי צלעותיהם שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,1000\}$. הוכיחו כי ניתן לבחור שלושה מלבנים מתוכם A,B,C כך שניתן לשים את A בתוך B ואת B בתוך C.

5. יהי G גרף פשוט, ויהי $\chi(G)$ מספר הצביעה שלו. נניח כי G נצבע בכמות כזו של צבעים. הוכיחו כי יש מסלול ב-G מאורך $\chi(G)$ כך שכל קודקודיו מצבעים שונים.

6. יהיו A ו-B נקודות סריג שונות ב-$\mathbb{R}^n$ עם קואורדינאטות שלמות ואי-שליליות. נאמר ש-$B > A$ אם בכל קואורדינאטה יש אי-שוויון חלש, והנקודות שונות.
   א. נניח כי S קבוצה אינסופית של נקודות סריג עם קואורדינטות אי-שליליות. הוכיחו כי קיימת בה תת-סדרה עולה אינסופית.
   ב*. נניח כי T קבוצה של נקודות סריג בתיבה $[0,t_1]\times[0,t_2]\times\dots\times[0,t_n]$ (כש-$t_1,t_2,\dots,t_n$ שלמים אי-שליליים קבועים). נתון שאף נקודה ב-T לא גדולה מאף נקודה אחרת. מצאו קבוצה T כזו מגודל מקסימלי.

7. יהיו $a_1,\dots,a_n$ מספרים ממשיים, כך ש-$\forall i,\ |a_i|\ge 1$. יהי I קטע באורך 1. מצאו את הכמות המרבית של וקטורים $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{0,1\}^n$ עבורם $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i \in I$.

8. משפחת קבוצות $S=\{S_1,\dots,S_n\}$ נקראת *חופשייה מאיחודים* אם לכל i,j,k שונים, $S_i\cup S_j\neq S_k$. הראו כי כל משפחה של n קבוצות מכילה תת-משפחה חופשייה מאיחודים בעלת לפחות $\sqrt{n}$ קבוצות.

9. (מחנה קיץ 2016) נתונה קבוצה A בגודל 27. מחפשים משפחה $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ של תתי-קבוצות של A כך שלכל שלישייה i,j,k של אינדקסים שונים בין 1 ל-n יתקיים: $A_k\not\subset A_i\cup A_j$. האם ייתכן כי
   א. $n>27$?
   ב. $n>100$?
   ג. $n>10000$?

<u>תרגיל קניבלים</u>

1. א. (ארדש-סקרש) הוכיחו כי לכל סדרה של מספרים שונים באורך $ab+1$ יש תת-סדרה עולה באורך $a+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $b+1$.
   ב. האם ניתן לטעון זאת גם לגבי סדרה באורך ab?

2. נתונה תת-קבוצה אינסופית S של מספרים טבעיים. הראו שניתן לבחור או תת-קבוצה אינסופית של S בה כל שני מספרים זרים, או סדרה אינסופית עולה ממש של מספרים מ-S בה כל מספר מתחלק בקודם.

3. (Iran 2006) למחנה מגיעים מספר מדריכים. כל מדריך מגיע פעם אחת ונשאר במחנה כמות כלשהי של זמן. מינק רוצה לבחור מספר זמנים שבהם הוא יוכל לספר למדריכים את הפתרונות לשאלות (כל פעם זה לוקח לו 0 זמן). נתון שמבין כל $k+1$ מדריכים, יש לפחות שניים שנמצאים בו זמנית במחנה. הוכיחו שמינק יוכל לספר את הפתרונות רק k פעמים, וכל המדריכים ישמעו אותם.

4. (Slovak Competition 2004) נתונים 1001 מלבנים, שאורכי צלעותיהם שייכים לקבוצה $\{1,2,\dots,1000\}$. הוכיחו כי ניתן לבחור שלושה מלבנים מתוכם A,B,C כך שניתן לשים את A בתוך B ואת B בתוך C.

5. יהי G גרף פשוט, ויהי $\chi(G)$ מספר הצביעה שלו. נניח כי G נצבע בכמות כזו של צבעים. הוכיחו כי יש מסלול ב-G מאורך $\chi(G)$ כך שכל קודקודיו מצבעים שונים.

6. משפחת קבוצות $S=\{S_1,\dots,S_n\}$ נקראת *חופשייה מאיחודים* אם לכל i,j,k שונים, $S_i\cup S_j\neq S_k$. הראו כי כל משפחה של n קבוצות מכילה תת-משפחה חופשייה מאיחודים בעלת לפחות $\sqrt{n}$ קבוצות.