מקדמים בינומיים \ משולש פסקל

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

I. גישה אינדוקטיבית

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

כמות הדרכים הקצרות ביותר על קווי רשת משבצות מ- $(0,0)$ ל-(k,m), כאשר $k+m=n$.

II. גישה קומבינטורית.

כמות הדרכים לבחור תת-קבוצה של k בקבוצה של n.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

III. גישה אלגברית – הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$(1+x)^n=1+nx+\binom{n}{2}x^2+\ldots$$

זהויות ידועות

א. $? = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}$.

ב. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots$.

ג. $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots\approx\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\ldots\approx\frac{2^n}{3}$.

ד. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.

ה. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{k+m}{k}=?$.

ו. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\pm\binom{n}{k}=?$

ז. $\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots=?$.

ח. $\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=?$.

ט. $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}=?$.

י*. זהות של אבל (Abel): $p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p-kq)^{k-1}(r+kq)^{n-k}=(p+r)^n$, כאשר n טבעי, p, q, r ממשיים, p שונה מ-0.

הכללה – מקדמים מולטינומיים: טיולים בשריג n-ממדי, חלוקה ל- m מחלקות בגודל נתון, $\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n$.

שאלות הקומבינטורית – **כמה יש:**

פתרונות בשלמים חיוביים (או אי-שליליים) למשוואה
$x_1+x_2+...+x_k=n$
(בהינתן k,n)

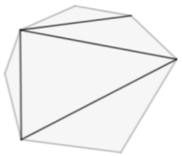
$100!$ מתחלק ב- $10!^{11}$

$1000!$ מתחלק ב- $10!^{111}$

$(n^k)!$ מתחלק ב- $n!^?$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}\binom{n-k}{5}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}\binom{n-k}{4}$$

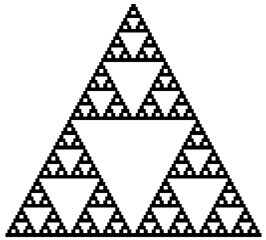
שילושים פשוטים של מצולע קמור נתון



דרכים לסדר n זוגות סוגריים:
(( ) (( ) ( ))) ( ) (( ))

התחלקות ותורת המספרים (p תמיד מסמן ראשוני)

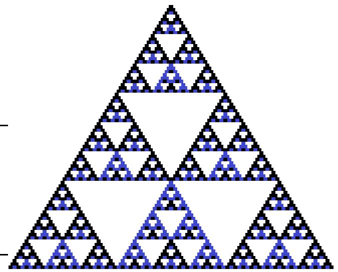
משפט קומר: חזקה מרבית של p שמחלקת את $\binom{m+n}{m}$ שווה לכמות הגרירות בתרגיל חיבור $m+n$ בבסיס p.



משפט לוקס: על מנת לחשב מקדם בינומי מודולו p, צריך להפריד לספרות בבסיס p ולהכפיל:

$$\binom{a}{b}=\binom{\overline{a_s a_{s-1}...a_2 a_1 a_0}}{\overline{b_s b_{s-1}...b_2 b_1 b_0}}=$$

$$=\binom{a_s}{b_s}\binom{a_{s-1}}{b_{s-1}}\cdot...\cdot\binom{a_1}{b_1}\cdot\binom{a_0}{b_0}\pmod{p}$$



$\binom{2p}{p}-2$ מתחלק ב p^3 ($p>3$)

באותה שורה של משולש פסקל, המספרים שהם לא בקצוות לא זרים.

אם $m+n+k=p-1$, אז

$$\binom{m+n}{n}=\pm\binom{n+k}{k}\pmod{p}$$

אי-שוויונים

$$1<\frac{k}{n}\cdot\sqrt[k]{\binom{n}{k}}<e$$

$$\sqrt{\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}<4^n\Big/\binom{2n}{n}<\sqrt{n\pi+1}$$

$$\binom{2n}{n}+2\cdot\binom{2n}{n+2k}\geq 2\cdot\binom{2n}{n+k}$$