

מחלקים בינומיים

משולש פסקל מוד 2.

1. הראו שבשורה מספר 2^n במשולש פסקל, מלבד המספרים בקצוות, כל המספרים זוגיים. הראו כי זה לא קורה בשום שורה אחרת.

2. חשבו את כמות המספרים האי-זוגיים בשורה ה- n ית של משולש פסקל.

3. הראו כי עבור כל n גדול, הרוב המוחלט של המספרים ב- n השורות הראשונות של משולש פסקל, זוגיים.

משולש פסקל מוד p .

4. הראו כי $\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ לכל $1 \leq k \leq n - 1$ אם $n = p^m$.

5. יהי $\overline{n_d \dots n_1 n_0}_p$ הרישום של n בבסיס p . הראו כי כמות המספרים שלא מתחלקים ב- p בשורה ה- n ית של משולש פסקל שווה ל-

$$\prod_{i=0}^d (n_i + 1)$$

6. מצאו את כל השורות של משולש פסקל שבהן כל המספרים לא מתחלקים ב- p .

7. יהיו $n \not\equiv -1 \pmod{p}$. הראו כי אם $\binom{n}{k} \not\equiv 0 \pmod{p}$ לא מתחלק ב- p אז גם

$$\binom{n+1}{k} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

8. נתבונן ב- p^k השורות הראשונות של משולש פסקל. חשבו את כמות המספרים שלא מתחלקים ב- p בשורות האלו.

9. חשבו את כמות ה-1ים וכמות ה-2ים ב- 3^k השורות הראשונות של משולש פסקל מוד 3.

משולש פסקל מוד p^k .

10. הראו כי אם ברישום הבינארי של n לא מופיעות שתי ספרות "1" רצופות אז כל המספרים האי-זוגיים בשורה ה- n של משולש פסקל, שקולים ל-1 מוד 4.

הראו כי אם מופיעות שתי ספרות "1" רצופות אזי בדיוק מחצית מהמספרים האי-זוגיים שקולים ל-1 מוד 4.

11. הוכיחו כי:

$$\text{א. } \binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^2}$$

$$\text{ב. } \binom{2p-1}{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$$

$$\text{ג. } \binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \pmod{p^3}$$