מחלקים בינומיים

עבור מספר טבעי n נסמן ב-$\overline{n_d \dots n_1 n_0}_p$ את הרישום שלו בבסיס p.

משפט קומר. $v_p\binom{n}{m}$ שווה לכמות ה-$carries$ בתרגיל החיבור של m ו-$n-m$ בבסיס p.

משפט לוקאס. יהי p מספר ראשוני ויהיו $n=\overline{n_d \dots n_1 n_0}_p$, $m=\overline{m_d \dots m_1 m_0}_p$. אזי מתקיים:

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_d}{m_d}\cdot \dots \cdot \binom{n_1}{m_1}\cdot\binom{n_0}{m_0} \ mod\ p.$$

משפט $\boldsymbol{Wolstenholme}$. הוכיחו כי לכל מספר ראשוני p ו-n,m שלמים חיוביים, מתקיים:

$$\binom{np}{mp} \equiv \binom{n}{m} \ mod\ p^3.$$

0. הוכיחו את המשפטים.

1. חשבו את כמות המספרים האי-זוגיים בשורה ה-n-ית של משולש פסקל.

2. חשבו את כמות ה-1ים וכמות ה-2ים ב-3^k השורות הראשונות של משולש פסקל מוד 3.

3. לכל n, חשבו את כמות המספרים ששקולים ל-1 מוד 4 בשורה ה-n-ית של משולש פסקל.

4. א. יהיו $m>1,k,n$ שלמים חיוביים. הוכיחו כי מבין המספרים:

$$\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},\dots,\binom{n+k}{k}$$

לפחות אחד לא מתחלק ב-m.

ב. הוכיחו כי לכל k,m קיימים אינסוף nים עבורם כל המספרים הבאים:

$$\binom{n}{k},\binom{n+1}{k},\dots,\binom{n+k-1}{k}$$

מתחלקים ב-m.

5. הראו כי לכל $n>1$ מתקיים ש-

$$\binom{2^{n+1}}{2^n} \equiv \binom{2^n}{2^{n-1}} \ mod\ 2^{2n+2}$$

6. הוכיחו כי שתי הקבוצות הבאות שקולות מודולו 2^n:

$$\{1,3,5,\dots,2^n-1\} \equiv \left\{\binom{2^n-1}{1},\binom{2^n-1}{3},\dots,\binom{2^n-1}{2^n-1}\right\}$$

7. יהי p ראשוני, n שלם חיובי ו-$1 \le m \le p-1$ כך ש-$p-1|n-m$.
הראו כי לכל $1 \le k \le p-1$ מתקיים ש-

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+p-1}+\binom{n}{k+2(p-1)}+\ldots \equiv \binom{m}{k}\ mod\ p$$

8. יהי p ראשוני אי-זוגי ו-n שלם חיובי כך ש-$p-1|n$. הראו כי

$$.\binom{n}{p-1}+\binom{n}{2(p-1)}+\ldots \equiv 1+p(n+1)\ mod\ p^2$$

9. הוכיחו כי

$$.3^m\left|\sum_{k=0}^{3^m-1}\binom{2k}{k}\right.$$

10. הראו כי לכל $p \ge 5$ ראשוני, מתקיים ש-

$$\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}4^{p-1}\ mod\ p^3$$