

בורסוק-אולם

תרגיל ברובו של ארסני אקופיאן

1. הוכיחו את משפט בורסוק-אולם עבור קליפה כדורית דו-ממדית.
2. הראו שהניסוחים הבאים של משפט בורסוק-אולם שקולים:
א. לכל העתקה רציפה $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ קיימת נקודה $x \in S^n$ עבורה $f(x) = f(-x)$.
ב. לכל העתקה רציפה אי-זוגית $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ קיימת נקודה $x \in S^n$ עבורה $f(x) = 0$.
ג. (לוסטרניק ושנירלמן) לכל כיסוי של S^n על ידי קבוצות פתוחות (או סגורות) U_0, U_1, \dots, U_n , קיימות שתי נקודות נגדיות שנמצאות באותה קבוצה.
3. הסיקו מבורסוק-אולם את משפט הכריך: במרחב \mathbb{R}^d נתונים d גופים (או מידות רציפות). אז קיים מישור שמחלק כל גוף לחצאים.
4. במישור נתונות N נקודות אדומות ו- K נקודות כחולות במצב כללי (כלומר אף 3 נקודות צבעוניות לא על ישר אחד). הראו שקיים ישר שמחלק את המישור לשני חצאי-מישורים פתוחים שכל אחד מהם מכיל לפחות $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ נקודות אדומות ולפחות $\lfloor \frac{K}{2} \rfloor$ נקודות כחולות.
5. הראו כי על כדור "א יש שתי נקודות מנוגדות עם אותה טמפרטורה ואותו לחץ אוויר.
6. במישור נמצאות 5 צורות. הראו כי קיימת שניונית שחוצה את כולם.
7. במישור סומנו 9 נקודות שונות: 3 אדומות, 3 ירוקות ו-3 כחולות. נתון שמבין הנקודות המסומנות אף 3 לא על ישר אחד ואף 4 לא על מעגל אחד. הראו שניתן לצייר 3 קשתות מעגליות שאין לאף שתיים מהן נקודות משותפות לא בפנים ולא בקצוות, ועל כל קשת נמצאות נקודות מסומנות מכל הצבעים.
8. בתוך ריבוע סומנו k נקודות כחולות ו- k נקודות אדומות במצב כללי. הראו שניתן לחלק את הריבוע לחלקים קמורים שבתוכם אין נקודות צבעוניות, ועל השפה של כל אחד מהם יש גם נקודה כחולה וגם נקודה אדומה.

9. ב- \mathbb{R}^d נתונות קבוצות A_1, A_2, \dots, A_d , בכל קבוצה n נקודות, כל הנקודות במצב כללי. הראו שאפשר לחלק את האיחוד שלהם ל- n קבוצות כך שבכל קבוצה יהיה איבר אחד מכל A_i והקמורים שלהם יהיו זרים.

10. ב-100 ארגזים נמצאים תפוחים, תפוזים ובננות. הראו כי ניתן לבחור 51 ארגזים שבהם יהיו לא פחות ממחצית התפוחים, לא פחות ממחצית התפוזים ולא פחות ממחצית הבננות.

11. מחרוזת (פתוחה) עם d סוגים של אבני חן ניתן לחלק בין שני פיראטים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של אבני חן מכל סוג, כשחותכים את השרשרת d פעמים לכל היותר.

12. (משפט דולניקוב) ב- \mathbb{R}^d נתונות d משפחות של קבוצות קשירות וחסומות, כך שכל שתי קבוצות באותה משפחה נחתכות. הראו כי קיים על-מישור שחותך את כל הקבוצות.

13. (משפט לובאס-קנזר) יהיו $n > k$ שלמים חיוביים. גרף קנזר מוגדר באופן הבא: הקודקודים שלו מתאימים לתתי קבוצות מגודל k של $\{1, 2, \dots, n\}$, כל שני קודקודים מחוברים בקשת אם ורק אם שתי הקבוצות המתאימות לא נחתכות. מצאו את מספר הצביעה של גרף קנזר.

בתיאבון!