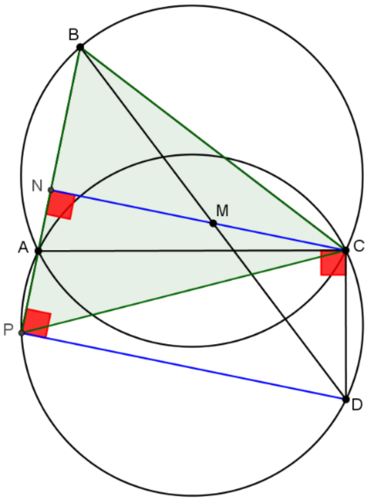
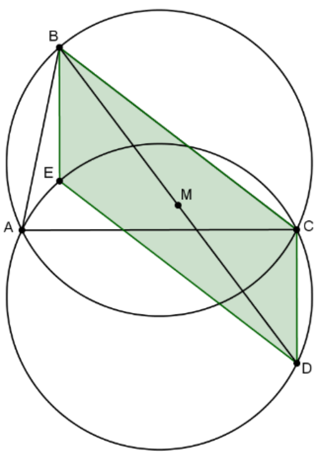
1. נתון מרובע קמור $ABCD$ שבו מתקיים $\angle ABC = \angle ADC$ ו-$\angle ACD = 90°$. נסמן ב-M את אמצע BD. הראו כי $CM \perp AB$.



<u>פתרון ראשון:</u> נתרגם את הנתון על שוויון הזוויות לכך שהנקודות B, D נמצאות על זוג שווים בגודלם שעוברים ב-A, C וסימטריים ביחס ל-AC. נחתוך את המעגל ACD עם הישר AB שנית בנקודה שתסומן P. מתקיים:

$$\angle APC = \angle ADC = \angle ABC$$

כלומר המשולש BCP שווה שוקיים. נסמן את עקב האנך מ-C ל-AB ב-N, כמובן ש-N היא אמצע BP. המרובע $ACDP$ חסום והזווית $\angle ACD$ ישרה ולפיכך גם $\angle APD$ ישרה ולכן $PD||CN$. במשולש BDP, הקטע CN עובר באמצע הצלע BP ומקביל לצלע PD ולפיכך עובר גם באמצע הצלע BD, כרצוי.



<u>פתרון שני:</u> נתרגם את הנתון כמו בפתרון הראשון.

נסמן ב-E את השיקוף של C ביחס ל-M. נקבל ש-$BE \perp AC$ ו-$CD = BE$.

C הוא מפגש הגבהים ב-ACD, הרדיוסים של המעגלים ABC, ACD שווים והזוויות ב-B, D בשני המשולשים שוות גם הן. נובע ש-CD שווה למרחק מ-B למפגש הגבהים של ABC, אבל אמרנו כבר ש-$CD = BE$ ו-$BE \perp AC$ ולכן E הוא מפגש הגבהים של ABC, משמע $CE \perp AB$.

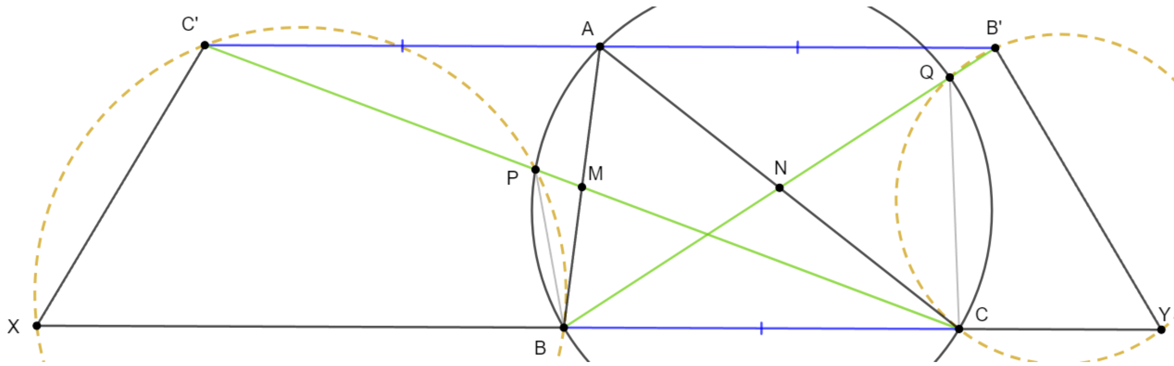
2. במשולש ABC אמצעי הצלעות AB, AC יסומנו ב-M, N בהתאמה. הישרים BN, CM נחתכים שנית עם המעגל החוסם של ABC בנקודות P, Q בהתאמה. יהיו X, Y נקודות על BC כך ש-$\angle BXP = \angle ACM, \angle CYQ = \angle ABN$ והנקודות X, B, C, Y נמצאות על הישר BC בסדר זה. הראו כי $AX = AY$.

<u>פתרון:</u> הנתון על שווין הזוויות אומר להגיד ש-X נמצאת על מעגל כלשהו, הבעיה שהזוויות לא נשענות על אותו המיתר. בנוסף נזכור ששווה להאריך תיכונים. שני אלו נותנים מוטיבציה לבנייה ופתרון הבאים:

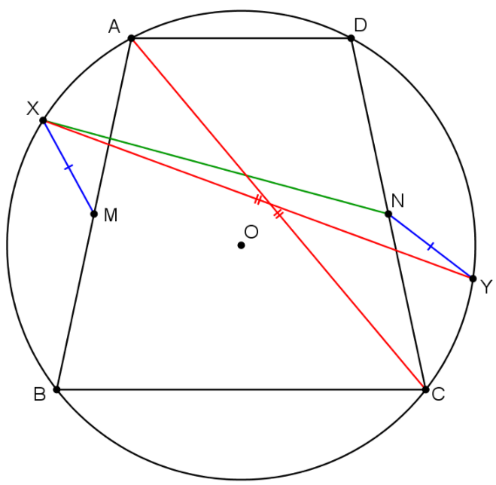
נסמן נקודות B', C' כך ש-$ABCB', ACBC'$ יהיו מקביליות. מהנתון נובע ש-

$$\angle BXP = \angle BC'P$$

ולכן $XBPC'$ חסום במעגל. ממעגל זה נובע ש-$\angle BXC' = \angle BPC = \angle BAC$. באופן דומה נקבל ש-$CQB'Y$ מעגל ולכן ש-$\angle B'YC = \angle BAC$. נובע ש-$XYB'C'$ זה טרפז שווה שוקיים, בנוסף ברור ש-$AB' = BC = AC'$ ולכן A היא אמצע של בסיס בטרפז שווה שוקיים ולפיכך $AX = AY$. ■



3. נתון טרפז $ABCD$ $(BC||AD)$ שחסום במעגל Ω. יהיו M, N אמצעי הצלעות AB, CD. על Ω נבחרה נקודה X. הראו כי $XM + XN \geq AC$.



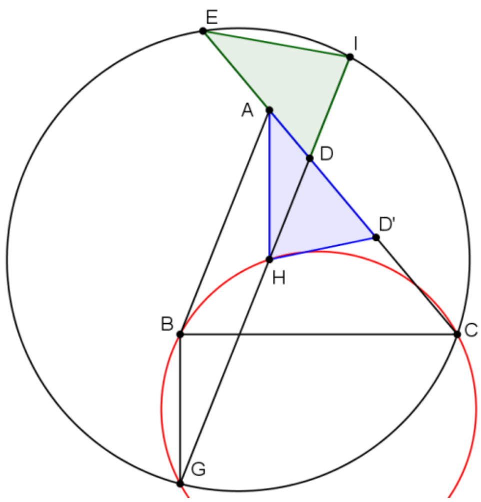
<u>פתרון:</u> נסמן ב-O את המרכז של Ω. נתבונן בסיבוב עם מרכז ב-O שמעביר את A ל-C, הוא כמובן מעביר גם את B ל-D ולכן את M ל-N. נסמן ב-Y את התמונה של X לאחר הסיבוב, כמובן שמתקיים ש-$XY = AC$ (הרי המשולשים BOC, XOY חופפים) ו-$XM = NY$. נשאר לציין שעל פי אי שוויון המשולש מתקיים:

$$XN + NY \geq XY$$

ולכן $XM + XN \geq AC$.

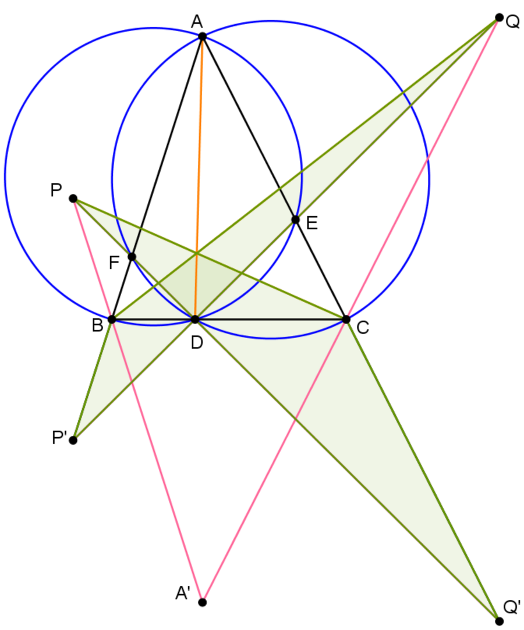
4. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC. תהי G נקודה כך ש-$ABGH$ מקבילית. על הקרן GH נבחרה נקודה I כך ש-AC חוצה את HI. המעגל ACI נחתך שנית עם AC בנקודה E. הוכיחו כי $EI = AH$.

<u>פתרון:</u> נסמן ב-D את אמצע HI. נשים לב שהשאלה וטענת שהמשולשים EDI ו-ADH כמעט חופפים, אנו יודעים ש-$DI = DH$, השאלה טוענת ש-$EI = AH$ והזוויות ב-D אומנם לא שוות אלה משלימות ל-$180°$ אבל יש תחושה שהשאלה מנסה להחביא מאיתנו את המשולשים החופפים.



ובכן, נסמן נקודה D' על AC כך ש-$HD = HD'$. עכשיו מתקבל ש-$\angle HD'A = \angle HDD' = \angle EDI$ ולכן השאלה שקלוה לכך שהמשולשים EDI ו-$AD'H$ חופפים. נשאר לנו למצוא רק עוד זווית אחת ששווה בשני המשולשים. נשים לב שאת הזווית ב-$\angle HAD'$ אנו מבינים, היא שווה ל-$90° - \angle C$. נשאר לחשב את הזווית ב-E, בגלל המעגל אנו יודעים ש-$\angle CEI = \angle CGI$. נשים לב ש-CH מאונך ל-AB שמקביל ל-GH ולכן הזווית $\angle CHG$ ישרה אבל כך גם הזווית $\angle CBG$ ולכן המרובע $CHBG$ חסום במעגל ולכן $\angle CGH = \angle CBH = 90° - \angle C$ מש"ל.

5. על הצלעות BC, AC, AB של משולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה כך שהמרובעים $ABDE$ ו-$ACDF$ חסומים. נסמן ב-A' את השיקוף של A ביחס ל-BC. הישרים BA' ו-DF נחתכים בנקודה P. הישרים CA' ו-DE נחתכים בנקודה Q. הראו כי הישרים BQ, CP, AD נפגשים בנקודה אחת.

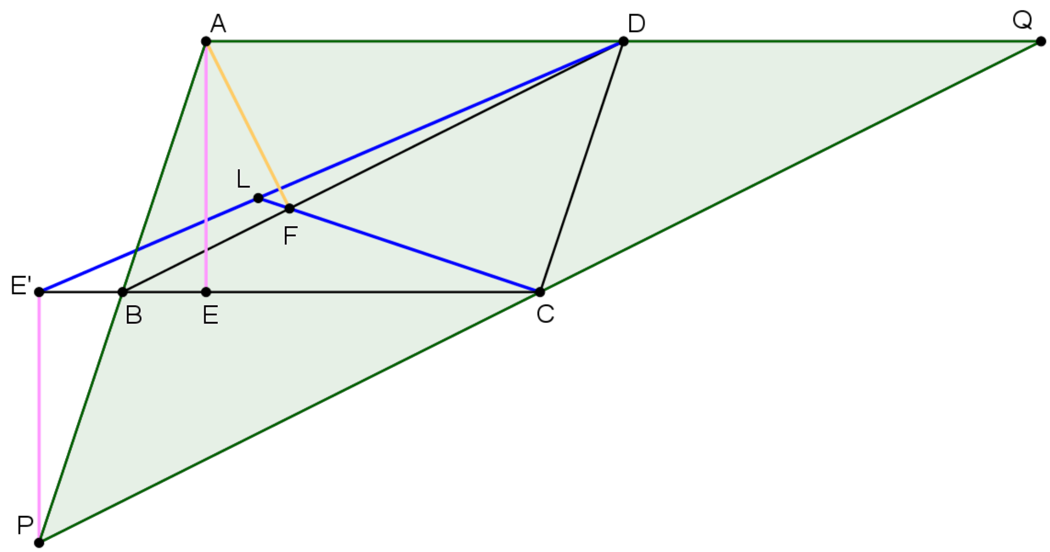


<u>פתרון:</u> ראשית נציין ש-$\angle BDF = \angle BAC = \angle CDE$ ולכן הישרים DE, DF סימטריים ביחס ל-BC. נסמן ב-P', Q' את השיקופים של P, Q ביחס ל-BC בהתאמה. על פי שהוכחנו, P', Q' נמצאות על DE, DF בהתאמה.

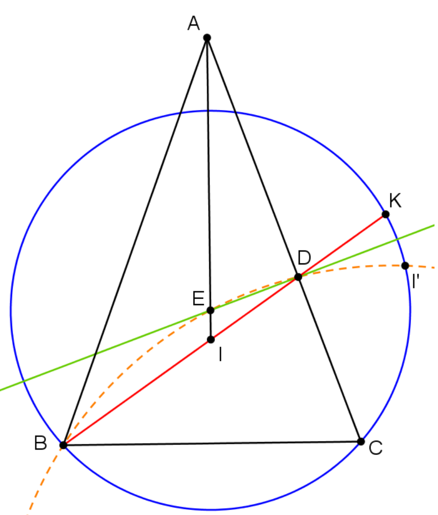
מהסימטריה ביחס ל-BC נובע ש-PQ ו-$P'Q'$ נפגשים על BC. לפיכך המשולשים BQP' ו-CPQ' פרספקטיביים ביחס לנקודה ולכן הם פרספקטיביים גם ביחס לישר. לפיכך, החיתוך של BP' עם CQ' (שזה כמובן A), החיתוך של PQ' עם $P'Q$ (שזה כמובן D) והחיתוך של BQ עם CP, נמצאים על ישר, ניצחון!

6. נתונה מקבילית $ABCD$. נסמן ב-E, F את עקבי האנכים מ-A ל-BC, BD בהתאמה. השיקוף של E ביחס ל-B יסומן ב-E'. הישרים CF ו-DE' נחתכים בנקודה L. הראו כי $\angle BAL = \angle ACB$.

<u>פתרון:</u> נסמן את השיקופים של A ביחס ל-B, D ב-P, Q בהתאמה. ברור ש-$AEPE'$ מקבילית ולכן $PE' \perp BC$. נשים לב שבמשולש APQ הנקודות C, D הן אמצעי הצלעות והנקודות F, E' הן אמצעי הגבהים. כידוע הישר שמחבר בין אמצע צלע לאמצע גובה עובר בנקודת למואן של המשולש ולכן L היא למואן של APQ אבל AC הוא תיכון ב-APQ ולכן $\angle BAL = \angle CAD = \angle ACB$.



7. יהי ABC משולש שווה שוקיים, $AB = AC$ ויהי I מפגש חוצי זוויות במשולש. נסמן ב-D את עקב חוצה זווית מ-B. תהי E נקודה על AI כך ש-$\angle EDC$ ישרה. נסמן ב-I' השיקוף של I ביחס ל-AC. הראו כי $BEDI'$ חסום במעגל.



<u>פתרון ראשון:</u> נסמן $\angle BAC = 2\alpha, \angle ABC = \angle ACB = 2\beta$. נשים לב ש-$\angle BDI' = 2\angle BDC = 2(180° - 3\beta)$. בנוסף נשים לב ש-$\angle BCI' = 3\beta$ ולכן אנחנו רוצים להוכיח ש-

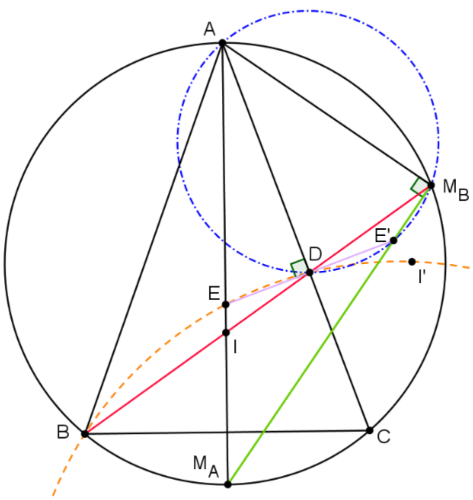
$$\angle BEI' = 2(180° - \angle BCI')$$

אבל אנחנו יודעים ש-E נמצאת על האנך האמצעי של BC ולכן השאלה למעשה שקולה לכך ש-E היא מרכז המעגל החוסם של BCI'.

נסמן ב-K את השיקוף של I' ביחס ל-DE. הנקודה K מתקבלת מ-I על ידי שני שיקופים ביחס לישרים מאונכים ולכן K היא הסיבוב של I סביב D. נחשבן:

$$\angle KI'C = 180° - \angle I'CA = 180° - \angle ACI = 180° - \angle CBK$$

ולכן $BCI'K$ חסום במעגל. ברור ש-E נמצאת על האנכים האמצעיים של BC, KI' ולכן E היא מרכז המעגל BCI', כרצוי.

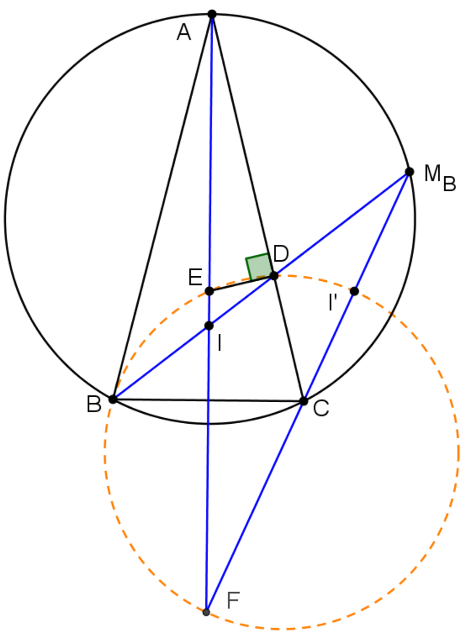


<u>פתרון שני:</u> נראה טיעון אחר לכך ש-E זה מרכז BCI'. למעשה, נוכיח ש-$EI' = EC$, זה כמובן יספיק.

נסמן את השיקוף של E ביחס ל-AC ב-E' ונקבל שמספיק להוכיח ש-$E'I = E'C$, כלומר ש-E' נמצאת על האנך האמצעי של CI. נסמן את החיתוכים של AI, BI עם המעגל החוסם של ABC ב-M_A, M_B בהתאמה. כידוע, M_AM_B זה האנך האמצעי של CI ולכן מספיק להוכיח ש-E' נמצאת על M_AM_B או במילים אחרות ש-$\angle AM_BE' = 90°$. אבל אנחנו יודעים ש-$\angle ADE' = 90°$ ולכן מספיק להוכיח ש-$ADE'M_B$ חסום במעגל. אבל זה די ברור:

$$\angle AE'D = \angle AED = 90° - \angle EAD = 90° - \alpha = \angle ACB = \angle AM_BB$$

ניצחון!



<u>פתרון שלישי:</u> AI חותך את המעגל BDE פעם ראשונה בנקודה E אבל חותך גם שוב בנקודה שנקרא לה F. בנוסף CI' עובר באמצע קשת AC (שמסומן M_B), כלומר I' זה חיתוך של CM_B עם המעגל BDE, אבל יש את החיתוך השני. עכשיו אפשר לנחש ששני החיתוכים האחרים מתלכדים כי שניהם זה חיתוך של חוצה זווית עם המעגל, אפשר גם לא לנחש את ואז לעבוד טיפה יותר.

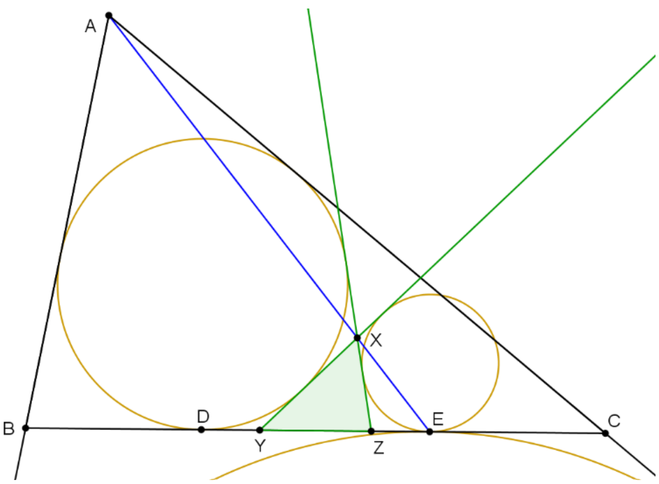
בכל אופן, אנו רוצים להוכיח ש-F, C, M_B נמצאות על ישר אחד. נחשבן:

$$\angle FCB = \angle FBC = \angle FBD - \angle CBD = \angle FED - \angle CBD = 180° - \angle ACB - \angle CBD = 180° - 3\beta$$

אבל ברור $\angle BCM_B = 3\beta$. נשאר להוכיח ש-I' נמצאת על מעגל DEF. נחשבן עוד קצת:

$$\angle DI'C = \angle DIC = 90° - \alpha = \angle ACB = 180° - \angle DEF$$

8. מעגל ω חסום במשולש ABC ומשיק לצלע BC בנקודה D. המעגל Ω חסום מחוץ לקודקוד A במשולש ABC ומשיק לצלע BC בנקודה E. על הקטע AE נבחרה נקודה X כך שהקטע XE לא נחתך עם ω. המשיקים מ-X ל-ω נחתכים עם BC בנקודות Y, Z. הראו כי אורך הקטע YZ לא תלוי בבחירה של X.

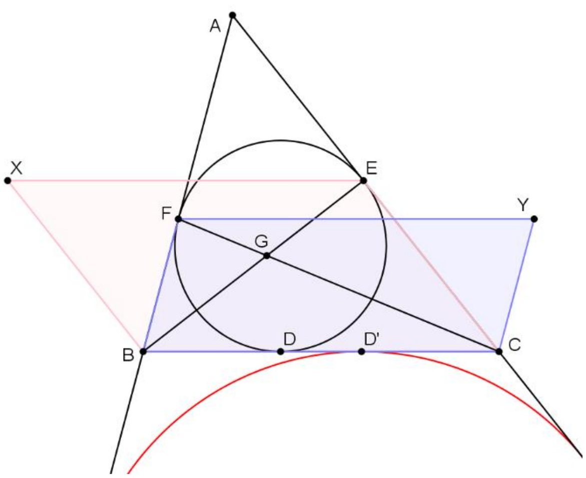


<u>פתרון:</u> ω הוא המעגל החסום מחוץ ל-Z במשולש XYZ, לשם סימטריה נוסיף את המעגל החסום מחוץ ל-Y במשולש XYZ, נסמן אותו ב-α. ממשפט מונג' על המעגלים ω, Ω, α נקבל שמרכז ההומוטתיה השלילית בין α ל-Ω נמצא על AX אבל המרכז הזה כמובן נמצא גם על BC ולכן מרכז ההומותטיה זו הנקודה E. בנוסף, Ω משק ל-BC ב-E ולכן גם α משיק ל-BC ב-E.

נשאר לעשות חשבון משיקים. נסמן ב-x, y, z את אורכי המשיקים מ-X, Y, Z למעגל החסום במשולש XYZ. כמובן $XY + XZ = 2x + y + z$ ו-$YZ = y + z$. כידוע $DY = ZE = x$ ולכן $DE = DY + YZ + EZ = 2x + y + z$ וזה לא תלוי בבחירה של X.

הערה: המסקנה לקחת מהשאלה הזו היא שכאשר רוצים לעשות חשבון קטעים אז שווה להוסיף עוד מעגלים חסומים לציור ואז יהיה יותר חשבון.

9. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות AB, AC בנקודות F, E בהתאמה. הישרים BE, CF נחתכים בנקודה G. נתונות נקודות X, Y כך שהמרובעים $BCEX$ ו-$CBFY$ הם מקביליות. הראו כי $GX = GY$.



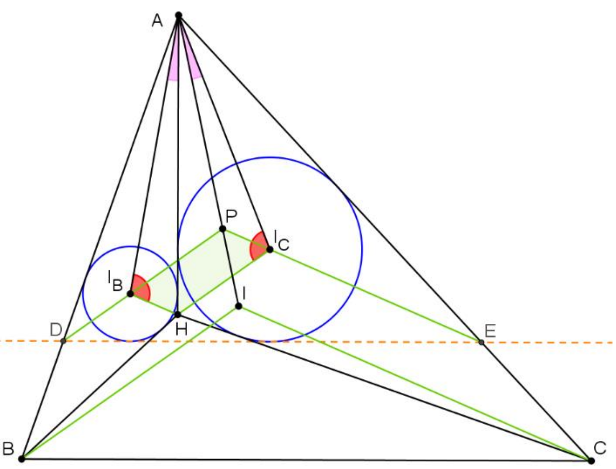
<u>פתרון:</u> נסמן ב-ω את המעגל החסום מחוץ ל-A במשולש, נסמן ב-D' את נקודת ההשקה שלו עם BC. נשים לב ש-$BX = CE = CD = BD' = l(B, \omega)$, כלומר הדרגה של B ביחס ל-ω שווה לדרגה שלה ביחס למעגל הנקודתי X. באופן דומה $EX = BC = p - x = l(E, \omega)$, כלומר גם ל-$E$ יש דרגות שוות ביחס ל-ω ו-X. לפיכך קיבלנו ש-BE הוא הציר הרדיקלי של X, ω, באופן דומה נוכיח ש-CF הוא הציר הרדיקלי של Y, ω ולכן G הוא המרכז הרדיקלי של שלושת המעגלים, משמע הוא נמצא על האנך האמצעי של XY, כרצוי.

הערה: אחרי השאלה הקודמת זה בטח לא מפתיע במיוחד שאנחנו רוצים להוסיף את המעגל החסום, אחרי הכל יש לנו כבר מעגל חסום ואנחנו רוצים להראות שוויון קטעים אז הגיוני לצפות לחשבון אורכים מסוים. מה גם שאחד הדברים שכיף לעשות עם מקביליות זה חשבון אורכים.

10. יהי H מפגש הגבהים במשולש חד זוויות ABC. הראו כי למעגלים החסומים במשולשים ABH, ACH יש משיק משותף שמקביל ל-BC.

<u>פתרון ראשון:</u> נסמן ב-I, I_B, I_C את מרכז המעגלים החסומים במשולשים ABC, ABH, ACH בהאתמה. ראשית נשים לב כי $AH \perp BC, BH \perp AC$ ולפיכך אחד מחוצי הזוויות הישרים AH, BH מאונך ל-CI והשני מקביל לו. המשולש ABC חד זוויות ולכן $HI_B||CI$ (ולא מאונך). באופן דומה נקבל ש-$BI||HI_C$.
נעביר את המשיק למעגל החסום ב-ABH שמקביל ל-BC וקרוב יותר ל-BC ונחתוך אותו עם AB בנקודה D אז $DI_B||BI||HI_C$. באופן דומה נגדיר את E בתור החיתוך של AC עם המשיק למעגל החסום ב-ACH שמקביל ל-BC וקרוב יותר אליו. נסמן את נקודת החיתוך של DI_B עם EI_C ב-P. מתקיים ש-HI_BPI_C מקבילית. בנוסף מתקיים שוויון הזוויות הבא:

$$\angle AI_BH = 90° + \frac{1}{2}\angle ABH = 90° + \frac{1}{2}\angle ACH = \angle AI_CH$$

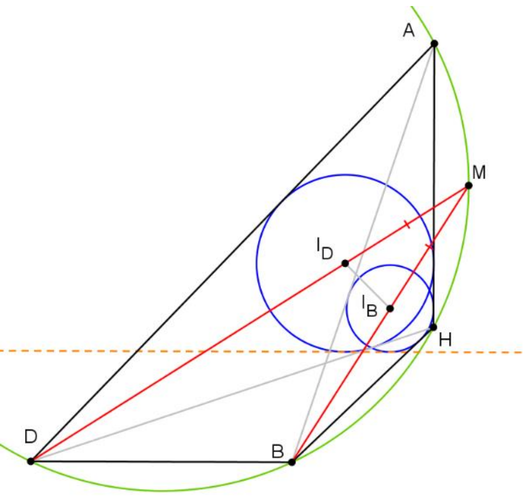


מלמת ההצמדה במקבילית נובע ש-$\angle I_BAH = \angle PAI_C$. נחשבן טיפה:

$$\angle CAP = \angle CAI_C + I_CAP = \angle I_CAH + \angle HAI_B =$$
$$= \angle I_CAI_B = \frac{1}{2}\angle CAB$$

ולפיכך AP עובר ב-I. נשאר לציין שההומותטיה עם מרכז ב-A שמעבירה את P ל-I תעביר את PD, PE ל-IB, IC ולכן תעביר את הישר DE לישר BC. מכאן נובע ש-$DE||BC$ אבל D, E הוגדרו להיות על משיקים למעגל החסומים ב-ABH, ACH שמבקילים ל-BC ולכן DE חייב להיות המשיק המשותף לשני המעגלים.

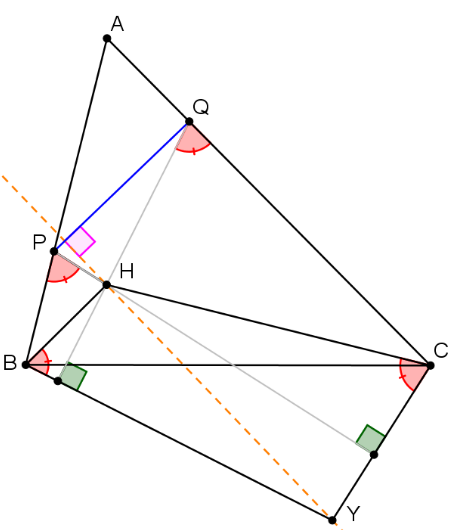
פתרון שני: נסמן ב-D את השיקוף של C ביחס ל-AH. מתקיים ש-$\angle ABH = \angle ACH = \angle ADH$ ולכן המרובע $AHBD$ חסום במעגל. נסמן ב-I_B, I_D את מרכזי המעגלים החסומים ב-ABH, ADH בהתאמה. נסמן ב-M את אמצע הקשת $\widehat{AH}$ של המעגל $AHBD$. כמובן ש-BI_BM, DI_DM הם ישרים, יתר על כן, ממשפט התלתן נובע ש-$MI_D = MI_B$ ולפיכך $\angle MI_DI_B = \frac{1}{2}(180° - \angle I_DMI_B)$. נחשבן זוויות:



$$
\begin{aligned}
\angle(BD, I_BI_D) &= \angle MI_DI_B - \angle MDB = \\
&= \frac{1}{2}(180 - \angle I_DMI_B - \angle ADH - 2\angle HDB) = \\
&= \frac{1}{2}(180 - \angle DAB - \angle ADH - \angle HDB - \angle BAH) = \\
&= \frac{1}{2}(\angle AHD - \angle BDH) = \frac{1}{4}\left(\widehat{AD} - \widehat{BH}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\angle(AH, BD) = 45°
\end{aligned}
$$

נזכור ש-$BD \perp AH$ ולכן I_BI_D יוצר זוויות של $45°$ גם עם AH וגם עם BD, כלומר I_BI_D מקביל לחוצה הזווית בין AH ל-BD ולכן השיקוף של AH ביחס ל-I_BI_D מקביל ל-BC. נשאר רק לציין ש-I_BI_D הוא ישר המרכזים של שני המעגלים שלנו ו-AH הוא משיק משותף ולכן השיקוף של AH ביחס ל-I_BI_D הוא משיק משותף אחר לשני המעגלים.

11. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC. על הצלעות AB, AC נבחרו נקודות P, Q כך ש-$\angle BPH = \angle CQH$. תהי X נקודה כך ש-$\angle XBC = \angle XCB = \angle BPH$ וכך ש-A, X נמצאות מאותו הצד של BC. הראו כי XH עובר במרכז המעגל החוסם של PQH.



פתרון: נצמיד איזוגונלית את X ביחס ל-BCH, הצמודה תסומן Y. נקבל ש-$\angle BPH = \angle HCY$ ולכן אם CH נחתך עם BC ב-D ו-PH נחתך עם CY ב-U אז $CPDU$ חסום במעגל. מכאן נובע ש-$PH \perp CY$. באופן דומה נקבל גם ש-$QH \perp BY$ ויחד עם $AH \perp BC$ נקבל שהמשולשים APQ ו-BCY אורטולוגיים. נסיק כי האנכים מהקודקודים של BCY לצלעות של APQ נפגשים בנקודה, אבל האנכים מ-B, C ל-AQ, AP נפגשים ב-H ולפיכך $HY \perp PQ$. נשאר לשים לב ש-$\angle PBH = \angle QCH$ ולפיכך $\angle BHP = \angle CHQ$, כלומר ל-$\angle BHC$ ו-$\angle PHQ$ יש חוצה זווית משותף. מכאן נובע שהשיקוף של HY ביחס לחוצה הזווית המשותף שלנו עובר גם ב-X (הרי X, Y צמודות ביחס ל-BCH) וגם במרכז המעגל PQH (הרי $HY \perp PQ$).

12. יהי מרובע $ABCD$ ובו $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. נסמן ב-$H$ את עקב האנך מ-A ל-BD. יהיו S,T נקודות על AB, AD בהתאמה כך שמתקיים:

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \angle CHT - \angle CTD = 90°$$

והנקודה H נמצאת בתוך המשולש CST.
הראו כי המעגל החוסם של STH משיק ל-BD.

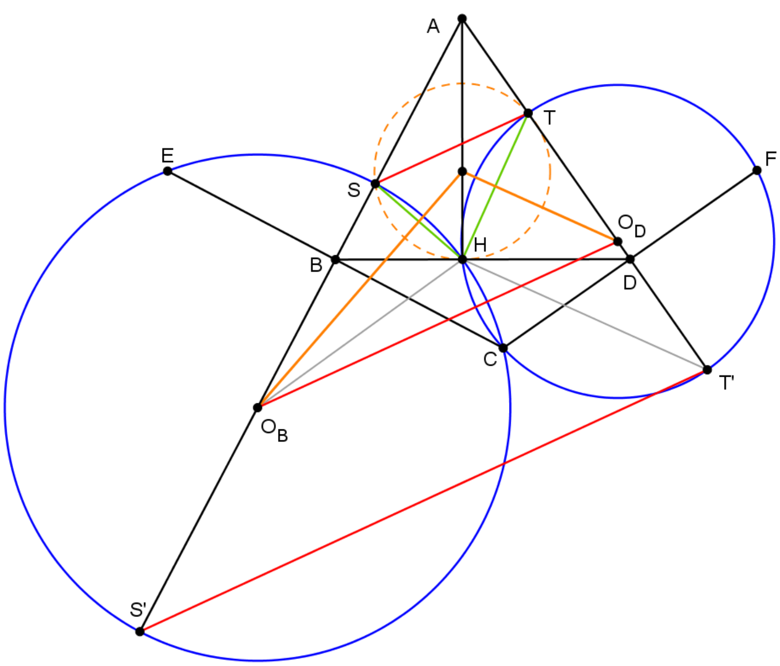
<u>פתרון ראשון:</u> נשכתב את הנתון:

$$\angle CHS = 90° + \angle CSB = 180° - \angle BCS$$

לפיכך אם נסמן ב-E את השיקוף של C ביחס ל-AB נקבל ש-$CHSE$ חסום. ברור שהמעלג הזה סימטרי ביחס ל-AB.
באופן דומה נסמן את השיקוף של C ביחס ל-AD ב-F ונקבל ש-$CHTF$ חסום במעגל שסימטרי ביחס ל-AD.

נסמן ב-S' ו-T' את החיתוכים השניים של CHS ו-CHT עם AB ו-AD בהתאמה.

נבצבע אינוורסשיקוף מ-A שמחליף בין B, D ובין H, C. הנקודה E עובר באינוורסשיקוף לנקודה E' שמקיימת ב-$AE' = AH$ וגם ש-AD חוצה את הזווית $\angle HAE'$ (הרי לפני השיקוף AB חצה את $\angle EAC$ והאינוורסיה לא שינתה כיוונים ב-A, רק השיקוף שינה כיוונים). ברור ש-E' נמצא על המעגל CFT ולפיכך המעגל CHS עובר באינוורסישקוף למעגל CHT. מכך נובע ש-$S'T' || ST$ ויתר על כן, אם נסמן ב-O_B, O_D את מרכזי המעגלים אז נקבל שגם $ST || O_B O_D$.



עכשיו קל לסיים. כל מה שהשאלה מבקשת שנוכיח זה שהאנכים האמצעים של ST, TH נפגשים על AH. האנכים האמצעים האלו כמובן עוברים ב-O_B, O_D ולמעשה, האנכים האמצעים האלו הם חוצי הזווית של $\angle SO_BH, \angle TO_DH$. נראה שחוצי הזוויות האלו מחלקים את AH באותו היחס וזה ינצח. ממשפט חוצה זווית היחסים האלו שווים ל- $\frac{AO_B}{HO_B}$ ו- $\frac{AO_D}{HO_D}$ בהתאמה. אבל $HO_B = S'O_B$ ו-$HO_D = T'O_D$ ולכן כל מה שאנחנו רוצים להראות זה

$$\frac{AO_B}{O_BS'} = \frac{AO_D}{O_DT'}$$

אבל זה ברור בגלל ש-$S'T'$||ST||O_BO_D.

<u>פתרון שני:</u> עדיין נבנה את המעגלים CHS, CHT ואת S', T' וכמובן נזכור ש-SS', TT' הם הקטרים של המעגלים הנ"ל. נחשבן קצת זוויות:

$$\begin{aligned}\angle SCT &= \angle SCH + \angle HCT = \angle SS'H + \angle HT'T \\ &= \angle ASH - 90° + \angle ATH - 90° = 180° - \angle SAT - \angle SHT\end{aligned}$$

כלומר $\angle SCT + \angle SHT = 180° - \angle SAT$ אבל כידוע עבור זוג נקודות צמודות איזוגונלית P, Q ביחס ל-SAT מתקיים שוויון דומה:

$$\angle SPT + \angle SQT = 180° - \angle SAT$$

יחד עם כך ש-AH, AC סימטריים ביחס לחוצה הזווית של $\angle SAT$ (הרי זה גובה וקוטר ב-ABD) נקבל ש-C, H אכן צמודות איזוגונלית ב-AST.

נשתמש בכך שהוכחנו ש-C, H צמודות ונחשבן עוד טיפה, והפעם במכוונות:

$$\angle CST + SCH = \angle HSA + \angle SS'H = \angle HSS' + \angle SS'H = \angle SHS' = 90°$$

כלומר $CH \perp ST$.

עכשיו מגיע הסיום המגניב! נשקף את C ביחס ל-ST, נסמן אותו ב-C'. נקבל:

$$\angle(C'S, ST) = \angle(HS, SA), \qquad \angle(C'T, TS) = \angle(HT, TA)$$

כלומר, A, C' צמודות איזוגונלית ביחס ל-SHT. אבל! HC' הוא גובה ב-SHT ולכן HA עובר במרכז המעגל החוסם, משמע SHT משיק ל-BD.