בניות עזר

1. נתון מרובע קמור $ABCD$ שבו מתקיים $\angle ABC = \angle ADC$ ו-$\angle ACD = 90^\circ$. נסמן ב-M את אמצע BD. הראו כי $CM \perp AB$.

2. במשולש ABC אמצעי הצלעות AB, AC יסומנו ב-M, N בהתאמה. הישרים BN, CM נחתכים שנית עם המעגל החוסם של ABC בנקודות P, Q בהתאמה. יהיו X, Y נקודות על BC כך ש-$\angle BXP = \angle ACM, \angle CYQ = \angle ABN$ והנקודות X, B, C, Y נמצאות על הישר BC בסדר זה.
הראו כי $AX = AY$.

3. נתון טרפז $ABCD$ $(BC||AD)$ שחסום במעגל Ω. יהיו M, N אמצעי הצלעות AB, CD. על Ω נבחרה נקודה X. הראו כי $XM + XN \geq AC$.

4. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC. תהי G נקודה כך ש-$ABGH$ מקבילית. על הקרן GH נבחרה נקודה I כך ש-AC חוצה את HI. המעגל ACI נחתך שנית עם AC בנקודה E. הוכיחו כי $EI = AH$.

5. על הצלעות BC, AC, AB של משולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה כך שהמרובעים $ABDE$ ו-$ACDF$ חסומים. נסמן ב-A' את השיקוף של A ביחס ל-BC. הישרים BA' ו-DF נחתכים בנקודה P. הישרים CA' ו-DE נחתכים בנקודה Q. הראו כי הישרים BQ, CP, AD נפגשים בנקודה אחת.

6. נתונה מקבילית $ABCD$. נסמן ב-E, F את עקבי האנכים מ-A ל-BC, BD בהתאמה. השיקוף של E ביחס ל-B יסומן ב-E'. הישרים CF ו-DE' נחתכים בנקודה L. הראו כי $\angle ACB = \angle BAL$.

7. יהי ABC משולש שווה שוקיים, $AB = AC$ ויהי I מפגש חוצי זוויות במשולש. נסמן ב-D את עקב חוצה זווית מ-B. תהי E נקודה על AI כך ש-$\angle EDC$ ישרה. נסמן ב-I' השיקוף של I ביחס ל-AC. הראו כי $BEDI'$ חסום במעגל.

8. מעגל ω חסום במשולש ABC ומשיק לצלע BC בנקודה D. המעגל Ω חסום מחוץ לקודקוד A במשולש ABC ומשיק לצלע BC בנקודה E. על הקטע AE נבחרה נקודה X כך שהקטע XE לא נחתך עם ω. המשיקים מ-X ל-ω נחתכים עם BC בנקודות Y, Z. הראו כי $XY + XZ$ לא תלוי בבחירה של X.

9. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות AB, AC בנקודות F, E בהתאמה. הישרים BE, CF נחתכים בנקודה G. נתונות נקודות X, Y כך שהמרובעים $BCEX$ ו-$CBFY$ הם מקביליות.
הראו כי $GX = GY$.

10. יהי H מפגש הגבהים במשולש חד זוויות ABC. הראו כי למעגלים החסומים במשולשים ABH, ACH יש משיק משותף שמקביל ל-BC.

11. H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC. על הצלעות AB, AC נבחרו נקודות P, Q כך ש-$\angle BPH = \angle CQH$. תהי X נקודה כך ש-$\angle XBC = \angle XCB = \angle BPH$ וכך ש-A, X נמצאות מאותו הצד של BC. הראו כי XH עובר במרכז המעגל החוסם של PQH.

12. יהי מרובע $ABCD$ ובו $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. נסמן ב-$H$ את עקב האנך מ-A ל-BD. יהיו S, T נקודות על AB, AD בהתאמה כך שמתקיים:

$$\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ, \angle CHT - \angle CTD = 90^\circ$$

והנקודה H נמצאת בתוך המשולש CST. הראו כי המעגל החוסם של STH משיק ל-BD.

בתאבון!