אפולוניוס

0. **משפט אפולוניוס:** נתונים שני מעגלים Ω_1, Ω_2. הוכיחו כי המקום הגיאומטרי של הנקודות X עבורן יחס הדרגות מ-X ל-Ω_1, Ω_2 קבוע, הוא מעגל.

1. נתונים מעגלים Ω_1, Ω_2 שנחתכים בנקודות A ו-B. מרכזי ההומתטיה שלהם יסומנו X, Y. הוכיחו כי $XYAB$ מעגל.

2. משולש ABC חסום במעגל Ω וחוסם מעגל עם מרכז I. אמצע הקשת $\widehat{BAC}$ תסומן N. הישר NI חותך את BC בנקודה E ואת Ω בנקודה T. הישר שעובר ב-E ומקביל ל-AI חותך את AT ב-P. הוכיחו כי PE חוצה את הזווית $\angle BPC$.

3. על מעגל Ω נבחרו נקודות A, B. המשיקים ל-Ω ב-A, B נפגשים ב-P. יהי Γ מעגל שעובר ב-A, P ומשיק ל-BP. נסמן ב-X את החיתוך השני של Ω, Γ. הישר PX חותך שנית את Ω ב-Y. המשיק מ-Y ל-Ω חותך את BP ב-T. המשיק המשותף של Ω, Γ שאינו BP חותך את AP בנקודה R. הוכיחו כי $AXTR$ חסום במעגל.

4. ישר l חותך את המשכי הצלעות BC, AC, AB של משולש ABC בנקודות X, Y, Z. מרכז המעגל החוסם של ABC יסומן O. עקב האנך מ-O ל-l הוא P. הוכיחו כי המעגלים APX, BPY, CPZ נחתכים בשתי נקודות.

5. במשולש ABC נסמן ב-M את אמצע BC וב-H את מפגש הגבהים. נקודות D, E נבחרו על AB, AC כך ש-D, H, E נמצאות על ישר, וגם $AD = AE$. הוכיחו כי מעגל ADE, ישר HM וחוצה הזווית של $\angle BAC$, נפגשים בנקודה אחת.

6. משולש ABC חסום במעגל Ω. האנך האמצעי של AB חותך את AC בנקודה E, והאנך האמצעי של AC חותך את AB בנקודה F. המשיק מ-B ל-Ω חותך את AC בנקודה P, והמשיק מ-C ל-Ω חותך את AB בנקודה Q. הוכיחו כי המעגלים AEF, APQ, Ω נחתכים בשתי נקודות.

7. מעגל ω חסום במשולש ABC ומשיק לצלעות BC, AC, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. החיתוך של EF עם BC יסומן L. נסמן ב-H את מפגש הגבהים של DEF. נסמן ב-P את נקודת החיתוך השנייה של DH עם ω. המעגל BCP נחתך שנית עם ω בנקודה X. הוכיחו כי $DHXL$ חסום במעגל.

8. נתון משולש שווה שוקיים ABC. נקודה D נבחרה על הישר שעובר ב-A ומקביל ל-BC, ונקודה E נבחרה על המעגל החוסם של ABC. מעגל שעובר ב- D, E ומשיק ל-AD נחתך עם BC שנית בנקודה F. ישר DF חותך את AB ב-X ואת AC ב-Y. הוכיחו כי הזווית $\angle XEY$ אינה תלויה בבחירה של D, E.

9. נתון מרובע $ABCD$ חסום במעגל. נסמן ב-T את חיתוך האלכסונים, וב-E את החיתוך של AB, CD. מעגל BCE חותך שנית את הישר ET בנקודה W, ואת חוצה הזיות של $\angle BEC$ בנקודה M. הישרים BC, WM נחתכים ב-L. הוכיחו כי TL מאונך ל-EM.

10. משולש ABC חסום במעגל Ω. נקודות P, Q הן אינברסיות ביחס ל-Ω. I, J הם מרכזי המעגלים החסומים מבחוץ מול A במשולשים ABP, ABQ, בהתאמה. הוכיחו כי הישרים PQ ו-IJ נחתכים על Ω.