# חשבון זוויות

**1 $IMO$.**

1.1 $M$ היא אמצע צלע $BC$ במשולש $ABC$ ו-$BE, CF$ הם גבהים במשולש. חוצי הזוויות של $\angle BAC$ ו-$\angle EMF$ נפגשים בנקודה $R$. הוכיחו כי המעגלים $BFR, CER$ נחתכים שנית בנקודה על הצלע $BC$.

1.2 על הצלע $BC$ נבחרה נקודה $W$. $BE, CF$ הם גבהים במשולש ו-$H$ הוא מפגש הגבהים. תהי $X$ הנקודה הנגדית ל-$W$ על המעגל החוסם של $BFW$ ובאופן דומה $Y$ הנגדית ל-$W$ על המעגל החוסם של $CEW$. הוכיחו כי $X, Y, H$ נמצאות על ישר.

1.3 על האלכסון $AC$ של מרובע חסום $ABCD$ נתונה נקודה $E$ כך ש-$BC = CE, AE = AD$. המעגל החוסם של $BDE$ נחתך עם $AC$ בנקודות $E, F$ ומרכזו יסומן $M$. הוכיחו כי $FM, AD, BC$ נפגשים בנקודה.

1.4 יהי מרובע $ABCD$ החסום במעגל ויהי מעגל $\Omega$ שמרכזו $O$, עובר ב-$B, D$ וחותך שנית את הישרים $AB, BC$ בנקודות $E, F$. נסמן ב-$H$ את מפגש הגבהים במשולש $DEF$. נתון שהישרים $EF, AC$ ו-$DO$ נפגשים בנקודה. הוכיחו כי המשולשים $EFH$ ו-$ABC$ דומים.

1.5 נתונות נקודות $A, B, C$ על ישר כך ש-$A, B, C$ ממוקמות על הישר בסדר זה. יהי מעגל $\Omega$ שעובר ב-$A, B$ ומרכזו $O$. תהי $D$ נקודה על המעגל החוסם של $AOB$. הוכיחו כי המעגל $ACD$ משיק ל-$\Omega$ אם ורק אם המעגל $BCD$ משיק ל-$\Omega$.

1.6 נתונים שני מעגלים $\omega_1, \omega_2$ שנחתכים בנקודות $A, B$. תהי $C$ נקודה על המשיק ל-$\omega_1$ ב-$A$ כך ש-$\angle CBA = 90°$. ישר $l$ עובר דרך $C$ ונחתך עם $\omega_2$ בנקודות $P, Q$. הישרים $PA, QA$ נחתכים עם $\omega_1$ שנית בנקודות $X, Y$. נסמן את עקב האנך מ-$A$ ל-$l$ ב-$Z$. הוכיחו כי $X, Y, Z$ נמצאות על ישר אחד.

1.7 יהי $ABC$ משולש שווה שוקיים, $AB = AC$. $I$ הוא מרכז המעגל החסום במשולש. נתון מעגל $\omega$ שמשיק ל-$AI$ ב-$I$ ועובר ב-$C$. $\omega$ נחתך שנית עם הצלע $AC$ בנקודה $Q$ ועם המעגל $ABC$ בנקודה $D$. נסמן ב-$M, N$ את אמצעי הקטעים $AB, CQ$. הוכיחו כי $BC, AD, MN$ נפגשים בנקודה אחת.

1.8 נתון מרובע $ABCD$ ובו $AD = BC$. תהי $E$ נקודה על הצלע $BC$ ותהי $F$ נקודה על הצלע $AD$ כך ש-$BE = DF$. האלכסונים $AC, BD$ נפגשים ב-$P$. הישר $EF$ נחתך עם הישרים $AC, BD$ בנקודות $Q, R$ בהתאמה. הוכיחו שכאשר $E, F$ זזות על הצלעות, המעגל $PQR$ עובר בנקודה קבועה בנוסף ל-$P$.

## $IMO$ 2.

2.1 על הצלעות $AB, AC$ של משולש $ABC$ נבחרו נקודות $D, E$ כך ש-$BCED$ חסום במעגל. הקטעים $BE, CD$ נפגשים בנקודה $F$. נסמן ב-$I$ את מרכז המעגל החסום ב-$ADE$ וב-$J$ את מרכז המעגל החסום ב-$FDE$. הוכיחו כי הישר $IJ$ עובר באמצע הקשת הקטנה $\widehat{DE}$ במעגל $BCED$.

2.2 יהי משולש $ABC$ ומעגל $\omega$ שמשיק לצלעות $AB, AC$ בנקודות $D, E$ בהתאמה כך ש-$BD + CE < BC$. על הצלע $BC$ נבחרו נקודות $F, G$ כך ש-$BF = BD, CG = CE$. הקטעים $DG$ ו-$EF$ נפגשים בנקודה $K$. נסמן ב-$N$ את הנקודה על הקשת $\widehat{DE}$ של $\omega$ כך שהמשיק ב-$N$ ל-$\omega$ מקביל ל-$BC$. הוכיחו כי מרכז המעגל החסום ב-$ABC$ נמצא על הישר $KN$.

2.3 משולש $ABC$ חסום במעגל $\Omega$ שמרכזו $O$. תהי $E$ נקודה על הצלע $BC$ כך ש-$OE$ מקביל לחוצה הזווית של $\angle BAC$ ותהי $D$ נקודה על חוצה זווית זה כך ש-$\angle DEB$ ישרה. תהי $K$ נקודה על הקרן $EB$ כך ש-$EK = EA$. המעגל $AKD$ נחתך עם $BC$ בנקודות $K, P$ ועם $\Omega$ בנקודות $A, Q$. הוכיחו כי $PQ$ משיק ל-$\Omega$.

2.4 יהי משולש $ABC$ ו-$I, I_A$ מרכזי המעגל החסום והמעגל החסום מבחוץ במשולש. נסמן ב-$N$ את אמצע הקשת $\widehat{BAC}$. $AI$ נחתך עם $BN, CN$ בנקודות $X, Y$. $A'$ זו הנקודה הנגדית ל-$A$ על המעגל החוסם של $ABC$. הוכיחו כי המעגלים $IA'I_A$ ו-$NXY$ משיקים.

## $IMO$ 3.

3.1 מרכז המעגל החסום ב-$ABC$ יסומן ב-$I$ ומרכז המעגל החוסם ב-$O$. $BD, CE$ הם חוצי הזוויות במשולש ו-$S$ היא אמצע הקשת $\widehat{BC}$ במעגל החוסם. האנכים האמצעים של $BD, CE$ נפגשים בנקודה $V$. תהי $X$ נקודה על האנך האמצעי של $OS$ המקיימת ש-$SV \perp XO$. הוכיחו כי $XA = XI$.

3.2 $H$ הוא מפגש הגבהים במשולש $ABC$. נסמן ב-$B'$ את השיקוף של $B$ ביחס ל-$AC$ וב-$C'$ את השיקוף של $C$ ביחס ל-$AB$. הישרים $BC$ ו-$B'C'$ נחתכים בנקודה $T$. המשיקים למעגל החוסם של $ABC$ ב-$B, C$ נחתכים בנקודה $X$. הוכיחו כי $HX$ מאונך ל-$AT$.

# בתאבון!