תורת מספרים אנליטית

1. יהיו a, b שלמים גדולים מאחד. הוכיחו כי קיימת כפולה של a שהרישום שלה בבסיס b מכיל את כל הספרות $0, \dots, b-1$.

2. דן רשם תוכנת מחשב שרושמת בשורה לפי סדר עולה את כל המספרים שהם חזקות של מספרים שלמים. הוכיחו שיש אינסוף זוגות של מספרים עוקבים בשורה שההפרש ביניהם מתחלק ב-9999.

3. הוכיחו כי יש אינסוף שלמים n עבורם n^2+1 חסר ריבועים.

4. יהיו n, k טבעיים כך ש-$n \geq 9^k$. הוכיחו כי $\binom{n}{k}$ מתחלק ב-k ראשוניים שונים לפחות.

5. הוכיחו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים n עבורם $n \mid \pi(n)$.

6. יהי f פולינום עם מקדמים טבעיים. הוכיחו כי אם $a, b \in \mathbb{Z}$ מקיימים ש-$a \cdot 2^{f(n)} + b$ הוא ריבוע שלם לכל n טבעי, אז $a = 0$.

7. יהי k טבעי. מספר n נקרא *מגניב* אם 99% מהמספרים $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ מתחלקים ב-k. הוכיחו כי קיים N עבורו לפחות 99% מהמספרים $1, \dots, N$ הם מגניבים.

8. תהי $a_1 < a_2 < \cdots$ סדרה עולה של טבעיים שמקיימת $a_n \leq n^{1.5}$ לכל n. נסתכל על קבוצת כל הראשוניים שמחלקים איזשהו מספר בסדרה ונרשום אותם לפי הסדר $q_1, q_2, \dots$. הוכיחו כי מתקיים $q_n \leq 1390^n$.

9. יהי $\varepsilon > 0$. הוכיחו כי קיימים אינסוף n כך של-(n^2+1) יש מחלק ראשוני גדול מ-$(1-\varepsilon) n \log n$.

10. יהיו a, b שלמים גדולים מאחד כך ש- $a^n - 1 \mid b^n - 1$ לכל n. הוכיחו כי b חזקה של a.

11. יהי $a > 1$ שלם ויהי $P(n)$ פולינום במקדמים שלמים עם מקדם מוביל חיובי. הוכיחו כי קבוצת ה-n-ים עבורם $n \mid a^{P(n)} - 1$ היא מצפיפות 0.

(נזכיר שקבוצה S נקראת מצפיפות 0 אם מתקיים ש-$\lim_{n \to \infty} \frac{|S \cap \{1, \dots, n\}|}{n} = 0$).