

# מדמ"ח

1. יהי עץ עם  $2n$  עלים. הוכח שניתן להוסיף  $n$  קשתות לעץ כך שהגרף שנוצר הינו דו-קשיר-קשתית, כלומר שלא משנה איזו קשת נוריד, הגרף ישאר קשיר.
2. נתון גרף קשיר, כך שעבור כל מעגל אי-זוגי שנמחק את הקשתות שלו, הגרף יהיה לא קשיר. הוכח שהגרף 4 צביע.
3. הצבת צריחים חוקית בלוח  $n \times n$  הינה הצבת  $n$  צריחים בלוח כך שבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק צריח יחיד.  
תהינה  $A$  ו- $B$ , זוג הצבות צריחים חוקיות. נתון שעבור כל מלבן משבצות שאחד מקודקודיו בפינה השמאלית העליונה, יש ב- $B$  לא פחות צריחים מאשר ב- $A$ .  
הוכח שניתן לעבור ממצב  $A$  למצב  $B$  בעזרת רצף פעולות מהצורה:
  - בהינתן מלבן שמכיל בדיוק שני צריחים, כך שאחד בפינה השמאלית התחתונה והשני בימנית העליונה, העבר את זוג הצריחים האלו לפינות השניות של המלבן.
4. בכיתה יש  $n$  ילדים שהולכים ל- $n$  חוגים, לכל חוג הולכים בדיוק שלושה ילדים. הוכח כי ניתן לשלוח לפחות  $\lfloor \frac{2}{5}n \rfloor$  מהילדים לטיול כך שלא יהיה חוג שכל התלמידים ממנו יוצאו לטיול.
5. 100 מספרים טבעיים מסודרים במעגל כך שהמחלק המשותף הגדול ביותר של כולם הוא 1. פעולה חוקית הינה להוסיף למספר את המחלק המשותף הגדול ביותר של שני שכניו.  
הוכח שניתן לבצע רצף פעולות כך שבסופו כל המספרים יהיו זרים זה לזה.
6. נתונים שלושה דליים בעלי קיבולת בלתי מוגבלת, כך שבכל דלי יש כמות שלמה של נוזל. בכל שלב ניתן להעביר לדלי כמות נוזל ששווה לכמות שיש בו כרגע.  
הראו כי ניתן לגרום לאחד הדליים להתרוקן.

7. איילה חשבה על גרף טורניר סודי. ברווז יכול לשאול אותה שאלות מהצורה "מה כיוון הקשת בין צומת  $a$  לצומת  $b$ ". עזרו למצוא לברווז אלגוריתם המשתמש ב- $4n$  שאלות, כך שברווז ימצא צומת עם דרגת יציאה 1, או להכריע שלא קיים כזה.
8. נתונה טבלה עם  $2^n$  עמודות ו- $m$  שורות, כך שבכל משבצת רשום מספר. הוכח שניתן לבצע תמורה בכל שורה, כך שעבור כל מספר ולכל  $i, j$ , כמות ההופעות שלו בעמודה  $i$  פחות כמות ההופעות שלו בעמודה  $j$  לכל היותר 1.
9. יהי  $n \geq 3$  שלם. במדינה ישנם  $n$  שדות תעופה, ו- $n$  חברות תעופה שמפעילות קווי תעופה דו-כיווניים. לכל חברת תעופה, קיים רצף שדות תעופה  $c_1, \dots, c_m$  כך ש- $m \geq 3$  ואי-זוגי, ויש קו תעופה בין  $c_i, c_{i+1}$  לכל  $1 \leq i < m$ , וגם קו בין  $c_1$  ו- $c_m$ . הוכח שקיים מסלול מעגלי שמשתמש בכמות אי-זוגית של טיסות, וכל הטיסות שייכות לחברות תעופה שונות.
10. הוכח שקיים קבוע  $c$ , כך שלכל  $n$ , לכל גרף בעל  $n$  צמתים ולפחות  $n + c\sqrt{n}$  קשתות, קיימים זוג מעגלים פשוטים באותו האורך.