תרגיל אלגברי

1. האם קיים שלם חיובי N כך ש- $\left(\sqrt{1997}-\sqrt{1996}\right)^{1998}=\sqrt{N+1}-\sqrt{N}$?

2. נתונים $m \geq n$ טבעיים ומספרים ממשיים $a_1, \dots, a_n$. איבר a_i נקרא יפה אם קיים מספר $1 \leq j \leq m$ כך ש-$a_i + \cdots + a_{i+j-1} \geq 0$. הוכיחו כי סכום כל האיברים היפים הוא אי-שלילי.

3. כתובים על הלוח מספרים ממשיים $0 < a_1, \dots, a_n < 1$. בכל שלב בוחרים שני מספרים כתובים a,b עבורם למשוואה $x^2 - ax + b = 0$ יש שני שורשים ממשיים, ומחליפים אותם בשני השורשים. הוכיחו כי לא ייתכן כי תהליך זה ימשיך לנצח.

4. נתונה סדרה (a_n) של מספרים ממשיים חיוביים המקיימת כי $\left|a_i - a_j\right| \geq \frac{1}{i+j}$ לכל i, j. הוכיחו כי קיים n עבורו $a_n \geq 0.999$.

5. האם קיימות זוג קבוצות שונות $A, B \subseteq N$ של מספרים טבעיים עבורן $|A|, |B| \leq 2011^2$ המקיימות כי $\left|\sum_{a\in A} x^a - \sum_{b\in B} x^b\right| < (1-x)^{2011}$, לכל $x \in (0,1)$.

6. נתון $c > 2$ ממשי. נניח כי סדרה (a_n) מקיימת $a_{n+m} \leq 2a_n + 2a_m$ וכן $a_{2^k} \leq \frac{1}{(k+1)^c}$. הוכיחו כי הסדרה חסומה.

7. יהי k טבעי, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. נניח כי $cos\theta$ אי-רציונאלי וכן $\cos(k\theta), \cos((k+1)\theta)$ רציונאליים. הוכיחו כי $\theta = \frac{\pi}{6}$.

8. תהי (s_i) סדרה עולה של טבעיים. נניח כי s_{s_i} סדרה חשבונית וכן s_{s_i+1} סדרה חשבונית. הוכיחו כי (s_i) סדרה חשבונית.

9. יהיו $a_1, \dots, a_r > 0$ ממשיים חיוביים. נגדיר את המשך הסדרה לכל $n > r$ באמצעות כלל נסיגה: $a_n = \max\{a_k + a_{n-k} | 1 \leq k \leq n-1\}$. הוכיחו כי קיים $1 \leq l \leq r$ טבעי וכן N טבעי עבורם $a_n = a_{n-l} + a_l$, לכל $n > N$.

10. יהיו $n \geq 2$ טבעי ו-$\lambda > 0$ ממשי חיובי. נתונות n נקודות על הציר הממשי. בכל שלב מותר לבחור זוג נקודות A, B עבורן A משמאל ל- B ולהחליף את A בנקודה A' מימין ל- B עבורה $BA' = \lambda AB$. עבור אילו ערכים של n, λ, ניתן להגיע מכל מצב התחלתי של הנקודות לכך שכל הנקודות נמצאות כמה ימין שנרצה?

11. תהי A קבוצה של טבעיים. נבחר מספרים b_i, c_i טבעיים המקיימים כי הקבוצות $b_iA + c_i \subseteq A$, מוכלות ב-A וזרות זו לזו. הוכיחו כי $\sum \frac{1}{b_i} \leq 1$.

בתאבון!