אלגברותם

1. תהי a_n סדרת מספריים עבורה לכל i,j מתקיים ש-

$$\left|a_{i+j} - a_i - a_j\right| \le 1$$

הוכיחו כי לכל i,j מתקיים אי השוויון

$$\left|\frac{a_i}{i} - \frac{a_j}{j}\right| < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$$

2. נגדיר סדרה ע"י $a_1 = \frac{1}{2}$ ונסיגה $a_{n+1} = \dfrac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$ לכל $n \ge 1$. חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

3. יהי n טבעי, נגדיר $a_0 = \frac{1}{2}$ ו-$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{N}$. הוכיחו כי $1 - \frac{1}{N} < a_N < 1$.

4. נתונה סדרת מספרים שלמים חיוביים $a_1, a_2, \dots, a_m$ הוכיחו כי ניתן למצוא b,c שלמים עבורם לכל n גדול מספיק, מתקיים ש-

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^{m} \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{bn + c} \right\rfloor$$

5. יהיו $0 < k < \frac{1}{2}$ ממשי ו-$0 < a_0, b_0 < 1$ מספרים ממשיים. נגדיר סדרות a_n, b_n באופן הבא:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}, \quad b_{n+1} = b_n^k$$

הוכיחו כי עבור כל n גדול מספיק $a_n > b_n$ או שעבור כל n גדול מספיק $a_n < b_n$, והבינו איזה אי-שוויון נכון.

6. מצאו את כל ה-$n \ge 2$-ים השלמים עבורם הפולינום

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n - na_1 a_2 \dots a_n$$

אי-פריק מעל הממשים.

7. נתונה סדרה a_n של מספרים שלמים חיוביים שבה כל מספר שלם מופיע פעם אחת בדיוק וידוע שמתקיים ש-$|a_n - n| \le 2 \cdot 10^6$ הוכיחו כי $\frac{1}{1998} \le \frac{|a_n - a_m|}{|n-m|} \le 1998$.

8. מצאו את a_{1000} כאשר נתון כי $a_1 = 1$, $a_n = \left\lfloor \sqrt{a_1 + \dots + a_{n-1}} \right\rfloor$.

9. נגדיר סדרה $a_0 = \frac{\pi}{2}, a_{n+1} = \sin a_n$. קבעו האם התור

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

מתכנס.

10. נתונים m, N שלמים חיוביים, הוכיחו כי קיים n וממשיים חיוביים שונים $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ כך שלכל $1 \le k \le N$ ו-$k \ne m$ מתקיים ש-

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \sum_{i=1}^{n} y_i^k$$

ועבור $k = m$ הזהות לא מתקיימת.

11. נתון פולינום $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ שכל השורשים שלו ממשיים ו- $a_0 \ne 0$. הוכיחו כי לכל k או $a_k \ne 0$ או $a_{k+1} \ne 0$.