אגדות

המטרה בכל שאלה היא להמציא אגדה קומבינטורית כדי להוכיח את הזהות.

1. הוכיחו כי: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k=3^n$.

2. הוכיחו כי: $F_k^2+F_{k+1}^2=F_{2k+1}$ כאשר F_n זה מספר פיבונאצ'י,
המוגדר ע"י נוסחת הנסיגה: $\begin{cases}F_0=0, \quad F_1=1\\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\end{cases}$.

3. הוכיחו כי: $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k+1}=\binom{2n}{n-1}$.

4. (תחרות הערים, סתיו 1982) הוכיחו כי: $\sum_{k=2}^{n}\left\lfloor\sqrt[k]{n}\right\rfloor=\sum_{k=2}^{n}\left\lfloor\log_k n\right\rfloor$.

5. הוכיחו כי: $\sum_{i+j=n+1}\binom{i}{2}\binom{j}{2}=\sum_{i+j+k=n}i\cdot j\cdot k$.

6. הוכיחו כי $\sum_{a,b,c,d>0}\left\lceil 0,\ n+1-\lceil a,b\rceil-\lceil c,d\rceil\right\rceil=\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j>0}}i^2j^2$, כשנסמן: $\lceil x,y\rceil=\max\{x,y\}$.

7. הוכיחו כי: $\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\binom{2n+2}{3}$.

8. (זהות של Strehl, 1993) הוכיחו כי Strehl צודק בטענתו כי: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\cdot\binom{2k}{n}$.

9. (גיליס תשע"ה) תהי סדרת פיבונאצ'י F_n מוגדרת כמו בשאלה 2. יהי p ראשוני אי-זוגי.
(א) הוכיחו כי $F_{p-1}+F_{p+1}-1$ מתחלק ב-p .
(ב) הוכיחו כי לכל k חיובי שלם, $F_{p^{k+1}-1}+F_{p^{k+1}+1}-\left(F_{p^k-1}+F_{p^k+1}\right)$ מתחלק ב-p^{k+1} .

10. הראו כי מתקיים: $n^n=\sum_{m=0}^{n-1}\left((-1)^{n+m+1}\binom{n}{m}\sum_{k=1}^{n}k^m\right)$.

בתיאבון!