תרגיל אפיני

הקדמה

התרגיל הזה הוא על סוג מיוחד של העתקות שנקראות העתקות אפיניות. אתם מוזמנים לנסות להוכיח בעצמכם את הטענות בהקדמה, אבל אתם יכולים גם להאמין להן ולנסות לפתור את השאלות.

<u>הגדרה</u>: **העתקה אפינית** זו העתקה חח"ע ועל מהמישור לעצמו שמעבירה ישרים לישרים.

<u>דוגמאות</u>: סיבוב, הזזה, שיקוף, הומותטיה, מתיחה בכיוון מסוים (למשל $f(x,y)=(ax,y)$)
באופן כללי העתקה אפינית היא מהצורה $f(x,y)=(ax+by+c,dx+ey+f)$.

<u>תכונות של העתקות אפיניות</u>:

1. העתקה אפינית משמרת ישרים מקבילים וחיתוכים של ישרים
2. העתקה אפינית משמרת יחסים על ישרים מקבילים (כלומר אם שני קטעים מקבילים אז יחס האורכים שלהם הוא אותו דבר אחרי ההעתקה האפינית)
3. העתקה אפינית משמרת יחסים בין שטחים
4. העתקה אפינית נקבעת לפי 3 נק' שלא נמצאות על ישר אחד – כלומר אם A,B,C לא על ישר אחד ו-A',B',C' לא על ישר אחד אז *קיימת ויחידה* העתקה אפינית שמעבירה את A ל-A', B ל-B' ו-C ל-C'.

שאלות

1. על האלכסון AC של מקבילית $ABCD$ נבחרה נקודה P. הוכיחו כי $S_{ABP}=S_{ADP}$.
2. יהי $ABCD$ טרפז כך ש-$CD \parallel AB$. נסמן ב-E את החיתוך של AD,BC וב-F את החיתוך של AC,BD. הוכיחו כי EF חוצה את בסיסי הטרפז.
3. דרך כל קודקוד של משולש ABC הועברו שני ישרים המחלקים את הצלע הנגדית לשלושה חלקים שווים. הוכיחו כי הישרים שמחברים קודקודים נגדיים של המשושה הנוצר על ידי ישרים אלו נפגשים בנקודה אחת.
   <u>בונוס</u>: מה הנקודה הזו?
4. על הצלעות AB,AD של מקבילית $ABCD$ נבחרו נקודות X,Y בהתאמה. XY חותך את AC בנקודה Z. הוכיחו כי

$$\frac{AB}{AX}+\frac{AD}{AY}=\frac{AC}{AZ}$$

5. נתון טרפז $ABCD$ כך ש-$AD||BC$. הישר המקביל ל-CD דרך B חותך את האלכסון AC בנקודה P. הישר המקביל ל-AB דרך C חותך את האלכסון BD בנקודה Q. הוכיחו כי PQ מקביל לבסיס הטרפז.
6. על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נק' M, N, P בהתאמה כך שמתקיים
$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$$
הוכיחו כי מפגשי התיכונים במשולשים ABC, MNP והמשולש שנוצר מהישרים AM, BN, CP מתלכדים.
7. במשולש ABC, D היא עקב הגובה מ-A. תהי P נק' על AD. נסמן ב-E את החיתוך של BP עם AC וב-F את החיתוך של AP עם BC. הוכיחו ש-$\angle FDA = \angle EDA$.
8. על הצלעות AB, BC, CA של משולש ABC נבחרו נקודות M, N, P בהתאמה.
   a. נסמן ב-M_1, N_1, P_1 את הנקודות הסימטריות ל-M, N, P ביחס לאמצעי הצלעות המתאימות. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
   b. על הצלעות AB, BC, CA נבחרו נקודות M_2, N_2, P_2 כך ש-$MM_2 \parallel AB, NN_2 \parallel BC, PP_2 \parallel CA$. הוכיחו כי $S_{MNP} = S_{M_1N_1P_1}$.
9. יהי מחומש קמור שבו כל אלכסון מקביל לאחת הצלעות. הוכיחו כי קיימת העתקה אפינית שמעבירה את המחומש למחומש משוכלל.
10. אמצעי האלכסונים AC, BD של מרובע קמור $ABCD$ יסומנו E, F בהתאמה. הישר המקביל ל-AC העובר ב-F והישר העובר ל-BD העובר ב-E נחתכים ב-P. הוכיחו כי הקטעים המחברים את P לאמצעי צלעות המרובע מחלקים אותו ל-4 מצולעים שווי שטח.
11. תהי P נקודה בתוך משולש ABC. נסמן את החיתוכים של AP, BP, CP עם הצלעות BC, CA, AB ב-M, N, K בהתאמה. יהיו Q, R, S השיקופים של P ביחס ל-M, N, K. הוכיחו שלא יכול להיות ששלושת השיקופים Q, R, S נמצאים בתוך המעגל החוסם של ABC.
12. נתון מרובע $ABCD$. נסמן את חיתוכי הצלעות הנגדיות ב-E, F. הוכיחו כי אמצעי AC, BD, EF על ישר.
13. נתון משושה שבו כל שתי צלעות נגדיות מקבילות. הוכיחו כי הישרים שמחברים את אמצעי הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודה אחת.

בתיאבון!