

גיאומטריה

במשולש ABC אמצעי הצלעות הם A_0, B_0, C_0 . המעגל החסום משיק לצלעות המשולש בנקודות A_1, B_1, C_1 . נקודת החיתוך של AA_1, BB_1, CC_1 תסומן G ומרכז המעגל החסום יסומן I. נתון שהמרובע ACGI חסום במעגל.

1. תשחזרו את המשולש מהקודקוד B ומהמעגל החסום ותוכיחו כי $\angle B \leq 60^\circ$.

א. הוכיחו כי מפגש התיכונים במשולש $A_1B_1C_1$ נמצא על המעגל עם קוטר BI.

2. הוכיחו כי A_1GC_1F מקבילית כאשר F זו נקודת פוירבך.

א. הנקודה שמשלימה את A_1GC_1 למקבילית תסומן F' . הוכיחו כי F' על המעגל החסום.

ב. נקודת החיתוך של A_1F' עם B_1C_1 תסומן A' (באופן דומה נגדיר גם את B' ו- C'). הוכיחו כי BA_1C_0A' מקבילית.

3. מרכז המעגל החסום מבחוץ במשולש $A_0B_0C_0$ מול הקודקוד B_0 יסומן O_B . הוכיחו כי F זה מרכז הכובד של $A_0C_0O_B$.

א. הוכיחו כי האמצעים של $A'C'$ ו- BO_B מתלכדים.

ב. הוכיחו כי F זה מרכז הכובד של $A'C'B_0$.

4. נסמן את נקודת החיתוך השנייה של AA_1 עם המעגל החסום ב-P ובאופן דומה את נקודת החיתוך השנייה של CC_1 עם המעגל החסום ב-Q.

נקודות החיתוך של B_1A_0, B_1C_0 עם AB, BC יסומנו P', Q' בהתאמה. הוכיחו כי PP', QQ' נחתכים על המעגל החסום.

א. נסמן את נקודת החיתוך של A_1C_1 עם AC ב-R. הוכיחו כי RQ' מקביל ל-AB.

ב. נבחר נקודה K' על המעגל החסום ונסמן את החיתוכים של $K'P, K'Q$ עם AB, BC ב- P'', Q'' בהתאמה. מצאו את המקום הגיאומטרי של אמצעי $P''Q''$ כאשר K' זז על המעגל.

5. הוכיחו כי GM מקביל ל- $A'C'$, כאשר M זה מפגש התיכונים ב-ABC.

א. נסמן את הנקודה הדואלית ל- A_0C_0 ביחס למעגל החסום ב-L. הוכיחו כי AL מאונך ל-CI.

ב. הוכיחו כי O_BF מקביל ל-BG.

ג. הוכיחו כי AA', BB', CC' מקבילים.

ד. הוכיחו כי LG חוצה את A_1C_1 .

בתאבון!