

2 ו-5

1. איילה רוצה לרשום על הלוח את המספרים 2^{100} ו- 5^{100} (את המספרים עצמם ברישום עשורוני, לא הביטויים הקצרים). כמה ספרות בסה"כ היא תצטרך לכתוב?
2. נניח כי 2^n מתחיל ב- 5^k (כמו למשל 256 שהוא 2^8 מתחיל ב-25 שהוא 5^2). הראו כי 5^n מתחיל ב- $2^k - 1$ (כך למשל בדוגמה שראינו 5^8 מתחיל ב-3).
3. נסמן ב- $\sigma(n)$ סכום הספרות של n ברישום עשורוני. הראו כי $\sigma(8n) \geq 8 \cdot \sigma(n)$.
4. כהכללה של השאלה הקודמת, מצאו את כל הזוגות של מספרים שלמים חיוביים a, b כך שלכל n שלם חיובי מתקיים $b \cdot \sigma(an) \geq \sigma(n)$.
5. א. למה יש יותר סיכוי: שהספרה השמאלית של 2^n שווה ל-6 או ל-5?
ב. אותה שאלה עבור 5^n .
6. איילה רשמה ספרה שמאלית ביותר עבור המספרים $2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}, \dots, 2^{n+k}$. הראו שברווח יכול למצוא m כך שהספרות שאיילה רשמה הם הספרות השמאליות ביותר עבור המספרים $5^m, 5^{m+1}, 5^{m+2}, 5^{m+3}, \dots, 5^{m+k}$.
7. שחר רושם במחברת את כל החזקות של 2 החל מ- 2^1 ועד 2^{3000} , וגם את כל החזקות של 5 החל מ- 5^1 ועד 5^{3000} . הראו שארבע הספרות השמאליות של אחד המספרים שהוא רושם הן "1000".
8. נתון שהמספר 2^{333} הוא בעל 101 ספרות ומתחיל מ-1.
א. כמה מספרים בסדרה 2, 4, 8, 16, ..., 2^{333} מתחילים מ-4?
ב. כמה מספרים בסדרה 5, 25, 125, 625, ..., 5^{333} מתחילים מ-4?
9. קבוצת נקודות במישור נקראת סבירה, אם קיים פולינום בשני משתנים $p(x, y)$ שאינו 0 זהותית, שמתאפס בכל הנקודות של הקבוצה (יכול להתאפס גם בנקודות אחרות). קבוצה שהיא לא סבירה, כלומר כזאת שכל פולינום שמתאפס בכל הנקודות שלה חייב להתאפס בכל הנקודות של המישור, תקרא קבוצה פרועה. נסמן ב- d_n את כמות הספרות ברישום העשורוני של 4^n , וב- e_n את כמות הספרות של 5^n .
א. האם קבוצת הנקודות (d_n, e_n) לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?
ב. האם קבוצת הנקודות $(d_n, n - e_n)$ לכל n טבעי, היא סבירה או פרועה?