שיטה uvw להוכחת אי שוויונים

יהי f פונקציה סימטרית (ציקלית) של שלושה משתנים. מהות השיטה היא להקטין מספר משתנים באי שוויון $f(a,b,c)\ge 0$ ולהעביר את הכרעת הוכחת אי השוויון לחקירת פונקציה של משתנה אחד בלבד.

יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים ונסמן: $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$, $abc=w^3$.
עתה נרשום את דף הנוסחאות אשר ילווה אותנו כל הדרך כל עוד אנו נשתמש בשיטה uvw.

$$a^2+b^2+c^2=9u^2-6v^2 \quad (1)$$

$$a^3+b^3+c^3=27u^3-27uv^2+3w^3 \quad (2)$$

$$\sum_{cyc}(a^2b+a^2b)=9uv^2-3w^3 \quad (3)$$

$$a^4+b^4+c^4=81u^4-108u^2v^2+18v^4+12uw^3 \quad (4)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b+a^3c)=27u^2v^2-18v^4-3uw^3 \quad (5)$$

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=9v^4-6uw^3 \quad (6)$$

$$a^5+b^5+c^5=243u^5-405u^3v^2+135uv^4+45u^2w^3-15v^2w^3 \quad (7)$$

$$\sum_{cyc}(a^4b+a^4c)=81u^3v^2-81uv^4-9u^2w^3+15v^2w^3 \quad (8)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b^2+a^3c^2)=27uv^4-18u^2w^3-3v^2w^3 \quad (9)$$

$$a^6+b^6+c^6=729u^6-1458u^4v^2+729u^2v^4-54v^6+162u^3w^3-108uv^2w^3+3w^6 \quad (10)$$

$$\sum_{cyc}(a^5b+a^5c)=243u^4v^2-324u^2v^4+54v^6-27u^3w^3+63uv^2w^3-3w^6 \quad (11)$$

$$\sum_{cyc}(a^4b^2+a^4c^2)=81u^2v^4-54v^6-54u^3w^3+36uv^2w^3-3w^6 \quad (12)$$

$$\sum_{cyc}a^4bc=27u^3w^3-27uv^2w^3+3w^6 \quad (13)$$

$$\sum_{cyc}a^3b^3=27v^6-27uv^2w^3+3w^6 \quad (14)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b^2c+a^3c^2b)=9uv^2w^3-3w^6 \quad (15)$$

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2=\sum_{sym}(a^4b^2-a^3b^3-a^4bc+2a^3b^2c-a^2b^2c^2)= \quad (16)$$

$$=27(3u^2v^4-4v^6-4u^3w^3+6uv^2w^3-w^6)$$

$$\prod_{cyc}(a^2+ab+b^2)=27(3u^2v^4-v^6-u^3w^3) \quad (17)$$

$$\sum_{cyc}(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)=27(3u^4-3u^2v^2+v^4) \quad (18)$$

$$\sum_{cyc}(a^2b-a^2c)=(a-b)(a-c)(b-c) \quad (19)$$

$$\sum_{cyc}(a^3b-a^3c)=3u(a-b)(a-c)(b-c) \quad (20)$$

(21)

$$\sum_{cyc}(a^3b^2-a^3c^2)=3v^2(a-b)(a-c)(b-c) \quad (22)$$

$$\sum_{cyc}(a^5b-a^5c)=(27u^3-18uv^2+w^3)(a-b)(a-c)(b-c) \quad (23)$$

$$\sum_{cyc}(a^4b^2-a^4c^2)=(9uv^2-w^3)(a-b)(a-c)(b-c) \quad (24)$$

דוגמא 1.

a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$(*) \quad (a+2b)(b+2c)(c+2a)\ge 27$$

(M.Rozenberg, 2007)

הוכחה

נניח כי $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ ($v\ge 0$) $abc=w^3$ ו- $u=tv$.

לכן $(*)\Leftrightarrow \sum_{cyc}(2a^2b+4a^2c+3abc)\ge 27v^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9w^3+3\sum_{cyc}(a^2b+a^2c)-27v^3\ge\sum_{cyc}(a^2b-a^2c)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27(uv^2-v^3)\ge(a-b)(a-c)(b-c).$$

כיוון ש- $u\ge v$, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $(a-b)(a-c)(b-c)\ge 0$.

ואז בהשתמש ב- (16) נקבל:

$$(*)\Leftrightarrow 729(uv^2-v^3)^2\ge 27(3u^2v^4-4v^6-4u^3w^3+6uv^2w^3-w^6)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^6-2(3uv^2-2u^3)w^3+24u^2v^4-54uv^5+31v^6\ge 0\ .$$

כיוון ש- $24u^2v^4-54uv^5+31v^6\ge 0$, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $3uv^2-2u^3\ge 0$

כלומר, נשאר להוכיח את אי השוויון שלנו במקרה $1\le t\le\sqrt{1.5}$.

לכן נשאר להיווכח כי $(3uv^2-2u^3)^2-(24u^2v^4-54uv^5+31v^6)\le 0$.

אבל $(3uv^2-2u^3)^2-(24u^2v^4-54uv^5+31v^6)\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4t^6-12t^4-15t^2+54t-31\le 0\Leftrightarrow(t-1)^2(4t^4+8t^3-8t-31)\le 0,$$

שזה פסוק אמת עבור $1\le t\le\sqrt{1.5}$. כלומר, אי השוויון מוכח.

דרך אגב, ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון $(a+kb)(b+kc)(c+ka)\ge(k+1)^3$ מתקיים
עבור כל a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$ הוא

$$k=\frac{3\sqrt[3]{4}-2+\sqrt{18\sqrt[3]{2}-12\sqrt[3]{4}}}{2}=2.333698853...$$

ואנו מקבלים אי שוויון $(3a+7b)(3b+7c)(3c+7a)\ge 1000$ שמתקיים עם אותם אילוצים.

דוגמא 2.
הוכח כי עבור כל a, b ו- c מתקיים:

$$(*)\quad (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\ge\sqrt{6}(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)$$

(M.Rozenberg, 2007)

הוכחה

נניח כי $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ (יכול להיות ש- v הוא מספר מדומה),
$abc=w^3$ ו- $u^2=tv^2$.
אפשר להניח גם כן כי $(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)\ge 0$ אחרת, אי השוויון מתקיים.
לכן בהשתמש בנוסחאות (1) ו- (16) מקבלים:

$$(*)\Leftrightarrow(9u^2-6v^2)^2(9u^2-9v^2)^2\ge 6\cdot 9u^2\cdot 27(3u^2v^4-4v^6-4u^3w^3+6uv^2w^3-w^6)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u^2w^6-4(3v^2-2u^2)u^3w^3+9u^8-30u^6v^2+31u^4v^4-12u^2v^6+4v^8\ge 0$$

כלומר, נשאר להוכיח כי $4(3v^2-2u^2)^2u^6-2u^2(9u^8-30u^6v^2+31u^4v^4-12u^2v^6+4v^8)\le 0$.
אבל $v^8\ge 0$ ולכן $4(3v^2-2u^2)^2u^6-2u^2(9u^8-30u^6v^2+31u^4v^4-12u^2v^6+4v^8)\le 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u^2(t^4-6t^3+13t^2-12t+4)\ge 0\Leftrightarrow u^2(t-2)^2(t-1)^2\ge 0.$$

הוכחנו את אי השוויון.
השוויון מושג כאשר $a=b=c$ ולמשל, כאשר $a=\sqrt{6}-3$, $b=\sqrt{6}$ ו- $c=\sqrt{6}+3$.

כיוון ש- $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2\ge 0$ עבור כל a, b ו- c ממשיים אזי השוויון (16) נותן

$$(25)\quad 3uv^2-2u^3-2\sqrt{(u^2-v^2)^3}\le w^3\le 3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3}.$$

אביא דוגמאות אחת אך מאד אופיינית ומראה איך אי השוויון (25) עוזר בהוכחת אי שוויונים סימטריים,
בהם השוויון מושג לא רק כאשר $a=b=c$.

דוגמא 3.
a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$(*)\quad 4\left(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\right)+9abc\ge 21$$

(nguoivn, 2009)

הוכחה

נניח כי $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$, $abc=w^3$ ו- $u^2=tv^2$.
אז $t\ge 1$ ובהשתמש ב- (6) נקבל $(*)\Leftrightarrow 4(9v^4-6uw^3)+9w^6\ge 21w^3\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4(3v^4-2uw^3)u^2+3w^6 \ge 7u^3w^3 \Leftrightarrow w^6-5u^3w^3+4u^2v^4 \ge 0 .$$

לכן נשאר להוכיח כי $w^3 \le \dfrac{5u^3-\sqrt{25u^6-16u^2v^4}}{2}$.

אבל (25) נותן $w^3 \le 3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3}$.

לכן נשאר להוכיח כי $3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \le \dfrac{5u^3-\sqrt{25u^6-16u^2v^4}}{2}$.

אבל

$$3uv^2-2u^3+2\sqrt{(u^2-v^2)^3} \le \frac{5u^3-\sqrt{25u^6-16u^2v^4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9t-6-4\sqrt{\frac{(t-1)^3}{t}} \ge \sqrt{25t^2-16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14t^2-27t+13+\frac{4(t-1)^3}{t} \ge 6(3t-2)\sqrt{\frac{(t-1)^3}{t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14t-13+\frac{4(t-1)^2}{t} \ge 6(3t-2)\sqrt{\frac{t-1}{t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18t^2-21t+4 \ge 6(3t-2)\sqrt{t(t-1)} \Leftrightarrow (3t-4)^2 \ge 0 .$$

כלומר, אי השוויון מוכח.
השוויון מושג כאשר $a=b=c$ וכאשר $a=4b=4c$ ובתמורות ציקליות של האחרון.

נגיד אנו צריכים להוכיח כי $f(a,b,c) \ge 0$ כאשר f היא פונקציה ממשית וסימטרית יחסית ל- a, b ו- c וקיימת g משלושה משתנים עבורה מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. $f(a,b,c)=g(u,v^2,w^3)$
2. g היא פונקציה קעורה כפונקציה של w^3.

אזי g מקבלת את הערך המינימלי שלה בקצה של w^3 .
כיוון ש- a, b ו- c הם שורשים ממשיים של משוואה $x^3-3ux^2+3v^2x=w^3$ אז תחום הערכים של w^3 הוא קטע שקצותיו מתאימים לנקודת המכסימום ולנקודת המינימום של הפונקציה $h(x)=x^3-3ux^2+3v^2x$ אשר מתאימות למקרה שוויון של שני מספרים מתוך a, b ו- c.
במידה והמספרים a, b ו- c נגיד לא שליליים, אנו נקבל אולי עוד ערך קצה של w^3 המתאים למקרה $w^3=0$.
אותו שיקול תקף גם לגבי g מונוטונית יחסית ל- w^3.
הרעיון הפשוט הזה מאפשר לפעמים להוכיח אי שוויונים מאד קשים.

דוגמא 4.

a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$(*)\quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2006)

הוכחה

יהי $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ ו- $abc=w^3=t$.

בהשתמש ב- (2) מקבלים:

$$(*) \Leftrightarrow u^{10} \geq (9u^3-9uv^2+w^3)w^7 \Leftrightarrow w^{10}+(9u^3-9uv^2)w^7-u^{10} \leq 0.$$

כיוון שקיבלנו אי שוויון הומוגני אפשר לשכוח מהתנאי $abc=1$ ולהניח כי a, b ו- c לא שליליים.

כלומר, נשאר להוכיח כי $f(t) \leq 0$ כאשר $f(t)=t^{\frac{10}{3}}+(9u^3-9uv^2)t^{\frac{7}{3}}-u^{10}$.

אבל f היא פונקציה קמורה ולכן היא מקבלת את הערך המכסימלי שלה בקצות הערכים של $t=w^3$.

זאת אומרת, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $b=c$ וכאשר $w^3=0$.

אם $w^3=0$ אז אי השוויון $w^{10}+(9u^3-9uv^2)w^7-u^{10} \leq 0$ מתקיים טריוויאלית.

אם $b=c$ אז בחזור לאי השוויון המקורי, נקבל:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{b^2}+2b}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{\frac{1}{b^6}+2b^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{\left(1+2b^3\right)^{10}}{b^{14}\left(1+2b^9\right)} \geq 3^9 \Leftrightarrow g(b) \geq 0\ ,$$

כאשר $g(b)=10\ln\left(1+2b^3\right)-14\ln b-\ln\left(1+2b^9\right)-9\ln 3$.

נסמן $b^3=x$. אז $g'(b)=\frac{60b^2}{1+2b^3}-\frac{14}{b}-\frac{18b^8}{1+2b^9}=\frac{2(x-1)(14x^3-9x^2-9x+7)}{b\left(1+2b^3\right)\left(1+2b^9\right)}$.

קל להראות כי $14x^3-9x^2-9x+7 \geq 0$ עבור $x>0$ ולכן

$x_{\min}=1$, אשר נותן $g(b) \geq g(1)=0$ ואי השוויון מוכח.

דוגמה 5.

a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c) \geq 0$$

(V.Cirtoaje)

הוכחה

נניח כי $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ ו- $abc=w^3$.

אזי $f\left(w^3\right)=\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c)$ היא פונקציה קווית.

לכן f מקבלת את הערך המינימלי שלה בקצה של w^3.

א) $w^3=0$. נניח כי $c=0$.

אז $\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c)=(a-b)^4(a+b)\ge 0$

ב) $b=c$.

לכן $\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c)=a(a-b)^2(a-2b)^2\ge 0$

ואי השוויון מוכח במלואו!

דוגמא 6.

מספרים a, b ו- c הם אורכי צלעות של משולש. הוכח כי

$$(*)\quad \frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge\sqrt{\frac{3}{ab+ac+bc}}$$

(Trần Quốc Anh, 2009)

הוכחה

יהי $x+y=a+2b$, $x+z=b+2c$ ו- $y+z=c+2a$.

אז $x=\frac{3a+b-c}{2}$, $y=\frac{3b+c-a}{2}$ ו- $z=\frac{3c+a-b}{2}$,

$a=\frac{5x-y+z}{9}$, $b=\frac{5y-z+x}{9}$ ו- $c=\frac{5z-x+y}{9}$.

לכן x, y ו- z חיוביים ו- $(*)\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\ge\frac{9}{\sqrt{\sum_{cyc}(x^2+11xy)}}$

עתה נתווה הוכחה של אי השוויון שקיבלנו עבור x, y ו- z לא שליליים כאלה ש- $xy+xy+xz\ne 0$.

נניח כי $x+y+z=3u$, $xy+xy+xz=3v^2$ ו- $xyz=w^3$.

נכפיל שני אגפים של אי השוויון האחרון במכנה משותף ונעביר את כל האיברים לאגף שמאל.

נקבל באגף שמאל פונקציה קווית של w^3.

לכן אגף שמאל יקבל ערך מינימאלי בקצה של w^3 ויישאר לבדוק שני מיקרים:

א) y=z=1 ומיקרה ב) z=0.

תרגילים לעבודה עצמית

1. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8}}\ge\sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}}$$

(Carlson)

2. a, b ו- c ממשיים. הוכח כי

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 2(ab+ac+bc)$$

(F.Shleifer, 1979)

3. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$a^2+b^2+c^2+\frac{\sqrt{3}(ab+ac+bc)\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 2(ab+ac+bc)$$

(M.Rozenberg, 2009)

4. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-bc}\le\frac{9}{2}$$

(V.Cirtoaje, 2005)

5. מצא את ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון

$$\frac{1}{1-kab}+\frac{1}{1-kac}+\frac{1}{1-kbc}\le\frac{9}{3-k}$$

מתקיים עבור כל a, b ו- c כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$.

(M.Rozenberg, 2009)

6. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+ac+bc$$

(Russia, 2002)

7 . a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge\sqrt[7]{(ab+ac+bc)^5}$$

(M. Rozenberg, 2009)

8. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\ge 3(ab+ac+bc+1)$$

(M.Rozenberg, nguoivn, 2009)

9. מצא את ה- k המינימלי עבורו אי השוויון

$$k(3-xy-xz-yz)\ge 1-xyz$$

מתקיים עבור כל x, y ו- z לא שליליים כאלה ש- $x^2+y^2+z^2=3$

(M.Rozenberg, 2005)

10. הוכח כי עבור כל x, y ו- z לא שליליים כאלה ש- $x^2+y^2+z^2=3$ מתקיים:

$$8+xyz\ge 3(xy+xz+yz)$$

11. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\geq\frac{3}{2}$$

(V.Cirtoaje, 2004)

12. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{2+3a^3}+\frac{1}{2+3b^3}+\frac{1}{2+3c^3}\geq\frac{3}{5}$$

(M.Rozenberg, 2009)

13. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{3+5a^4}+\frac{1}{3+5b^4}+\frac{1}{3+5c^4}\geq\frac{3}{8}$$

(M.Rozenberg, 2009)

14. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)^2\geq 24abc(a^2+b^2+c^2)$$

(T.Sloyan, 2005)

15. הוכח כי עבור כל x, y, z ו- r ממשיים מתקיים

$$\sum_{cyc}(x^4-(r+1)(x^3y+x^3z)+r(r+1)x^2y^2+(1-r^2)x^2yz)\geq 0$$

(V.Cirtoaje, 2006)

16. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[16]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(M. Rozenberg, 2006)

17. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[29]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2006)

18. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$a^2+b^2+c^2+15(ab+ac+bc)\geq 16(a+b+c)$$

(M.Rozenberg, 2006)

19. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 12(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)$$

(V.Cirtoaje, 2005)

20. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 12(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)+171$$

(M.Rozenberg, 2009)

21. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

(Romania, 2006)

22. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$.

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geq 18$$

(V.Cirtoaje, 2006)

23. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 81(a^2+b^2+c^2)abc$$

(V.Cirtoaje, 2005)

24. a, b ו- c מספרים ממשיים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2 \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}+\frac{ac}{a^2+c^2+3b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

(V.Cirtoaje, Pham Kim Hang, 2005)

25. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9 \geq 10\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

26. מצא את הערך המינימלי של M עבורו אי השוויון

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

מתקיים עבור כל ערכים a, b ו- c.

(IMO, 2006)

27. מצא את הערך המכסימלי של M עבורו אי השוויון

$$a^3+b^3+c^3 \ge M\,(a-b)(a-c)(b-c)$$

מתקיים עבור כל ערכים a, b ו- c לא שליליים.

28. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \ge \frac{5}{2}$$

(Hojoo Lee)

29. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b+c} \ge 3$$

(Pham Kim Hang, 2007)

30. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=1$. הוכח כי

א) $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{3}{a+b+c} \ge 4$$

ב) $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b+c} \ge 2$$

(M.Rozenberg, 2009)

31. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$\frac{12}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3}{abc} \ge 7$$

(V.Cirtoaje, 2005)

32. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$1+\frac{8}{a+b+c} \ge \frac{11}{ab+ac+bc}$$

(M.Rozenberg, 2006)

33. a, b ו- c ממשיים. הוכח כי

$$(ab+ac+bc)^2(a^2+b^2+c^2) \ge (a^2+2bc)(b^2+2ac)(c^2+2ab)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

34. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2 \ge 18(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

35. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $a+b+c=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{25}{1+48abc}$$

36. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$13(a+b+c)+6abc\geq 45$$

(M.Rozenberg, 2006)

37. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$. הוכח כי

$$(2-3ab)(2-3ac)(2-3bc)\geq 1$$

(V.Cirtoaje, 2006)

38. הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=9$ מתקיים:

$$2(a+b+c)-abc\leq 10$$

39. . הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$ מתקיים:

$$a+b+c-2abc\leq\sqrt{2}$$

40. . הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים מתקיים:

$$(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\geq(ab+ac+bc)^3$$

(M.Rozenberg, 2007)

41. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\neq 0$. הוכח כי

$$(ab+ac+bc)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

(Ji Chen, 1995)

42. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

(V.Cirtoaje, 2000)

43. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{8}{a+b+c}\geq 6$$

(Pham Kim Hang, 2007)

44. a, b ו- c לא שליליים, $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$ ($v\geq 0$) ו- $abc=w^3$.
הוכח כי עבור כל $k\geq 3+2\sqrt{3}$ מתקיים: $ku+w\geq(k+1)v$.

(M.Rozenberg, 2007)

45. l_a , l_b ו- l_c אורכי חוצי זווית של משולש בעל שטח S . הוכח כי

$$l_a l_b + l_a l_c + l_b l_c \ge 3\sqrt{3}S$$

(W.Janous)

46. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי

$$a^4+b^4+c^4+4(a+b+c)\le 9+2(a^3+b^3+c^3)$$

47. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\ne 0$. הוכח כי

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}+\frac{12(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3}\ge\frac{41}{9}$$

(Pham Huu Duc, 2006)

48. a, b ו- c חיוביים, כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2(ab+ac+bc)\ge 9$$

(Pham Kim Hang, 2007)

49. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$8(a+b+c)^2\ge 9(a+b)(a+c)(b+c)$$

(M.Rozenberg, 2007)

50. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\ne 0$. הוכח כי

$$\frac{a}{b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3}\ge\frac{18}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-ac-bc}$$

(M.Rozenberg, 2007)

51. a, b ו- c מספרים ממשיים. הוכח כי

$$3(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)\ge(a+b+c)^2(ab+ac+bc)^2$$

(M.Rozenberg, 2009)

52. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\le 3$$

53. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי

$$\frac{a^2}{2a+b+c}+\frac{b^2}{2b+a+c}+\frac{c^2}{2c+a+b}\ge\frac{3}{4}$$

(M.Rozenberg, 2008)

.54 a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\neq 0$. הוכח כי

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2(a+b+c)}$$

(M.Rozenberg, 2008)

.55 a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=2(ab+ac+bc)$. הוכח כי

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{2abc}$$

(M.Rozenberg, 2008)

.56 a, b ו- c מספרים ממשיים. הוכח כי

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(b+c)^4\geq\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4\right)$$

(Vo Quoc Ba Can, 2007)

.57 a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$a^5+b^5+c^5+6\geq 3\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

(M.Rozenberg, 2008)

.58 a, b ו- c לא שליליים . הוכח כי

$$(a^4+b^4+c^4)(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\geq 9abc(a^5+b^5+c^5)$$

.59 a, b ו- c לא שליליים . הוכח כי

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 3\sqrt{3abc(a^3+b^3+c^3)}$$

.60 a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+3\geq 9\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

.V a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(Vo Quoc Ba Can, 2007)

62. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\geq 6\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right)^{\frac{4}{5}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

63. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq \sqrt{\frac{15(a^2+b^2+c^2)}{ab+ac+bc}-6}$$

(M.Rozenberg, 2008)

64. הוכח כי ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\,\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}\geq 3+k$$

מתקיים עבור כל a, b ו- c חיוביים, הוא $k=3\sqrt[3]{4}-2$.

(Bach Ngoc Thanh Cong, 2007)

65. a, b, c ו- d לא שליליים. נסמן $a+b+c+d=4u$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=6v^2$ ו- $abc+abd+acd+bcd=w^3$. הוכח כי

$$3u^2v^4-4v^6-4u^3w^3+6uv^2w^3-w^6\geq 0$$

(M.Rozenberg, 2008)

66. a, b, c ו- d לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+ad+bc+bd+cd=6$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq \sqrt[22]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

67. a, b, c ו- d לא שליליים כאלה ש- $abc+abd+acd+bcd=4$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq \sqrt[13]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

68. a, b ו- c לא שליליים, $a+b+c=3u$, $a^3+b^3+c^3=3p^3$, $abc=w^3$.

הוכח כי $2p+5w\leq 7u$

(Vo Quoc Ba Can, 2008)

69. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. מצא את הערך המינימלי של הביטוי:

$$\frac{(a+b+c)^4}{a^2+b^2+c^2}$$

(V.Cirtoaje, 2008)

70. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{2(a^3+b^3+c^3)+4abc}$$

71. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+ac+bc) \leq 9$$

(dduclam, 2008)

72. . a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+1 \geq \frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

(Vo Quoc Ba Can, 2008)

73. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=1$ ו- $ab+ac+bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{27}{2}abc \geq 5$$

(M.Rozenberg, 2008)

74. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{3a+b+c}+\frac{1}{3b+a+c}+\frac{1}{3c+a+b} \leq \frac{3}{5}$$

(M.Rozenberg, 2008)

75. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab} \geq \frac{6(a+b+c)}{3(a^2+b^2+c^2)+ab+ac+bc}$$

(M.Rozenberg, 2009)

76. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

א) $a+b+c+2(a^2b+b^2c+c^2a) \geq 9$

ב) $a^2+b^2+c^2+17(a^2b+b^2c+c^2a) \geq 54$

(M.Rozenberg, 2009)

77. a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$. הוכח כי
$$(5-2a)(5-2b)(5-2c)\ge 27$$
(M.Rozenberg, 2009)

78. a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2b+b^2c+c^2a=0$. הוכח כי
$$a^2+b^2+c^2\ge\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}-1}(ab+ac+bc)$$
(M.Rozenberg, 2009)

79. a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^3b+b^3c+c^3a=0$. הוכח כי
$$a^2+b^2+c^2\ge 3(ab+ac+bc)$$
(M.Rozenberg, 2009)

80. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי
$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{37(a^2+b^2+c^2)-19(ab+ac+bc)}{6(a+b+c)}$$
(M.Rozenberg, 2009)

81. $a+b+c=3$ ו- $abc\ge -4$. הוכח כי
$$5(ab+ac+bc)\le 12+3abc$$
(Bulgaria, 2009)

82. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

א) $$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}}$$

ב) $$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[11]{\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

83. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי
$$\sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)(3a-5b)(3a-5c)\ge 0$$
(V.Cirtoaje, 2009)

84. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי
$$\sum_{cyc}(10a^4-33a^3b-33a^3c+64a^2b^2)\ge 0$$
(V.Cirtoaje, 2009)

85. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^8 \geq 128(a^5b^3+a^5c^3+b^5a^3+b^5c^3+c^5a^3+c^5b^3)$$

(M.Rozenberg, 2009)

86. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$8(a+b+c)^4 \geq 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

(Pham Kim Hang, 2009)

87. x, y ו- z לא שליליים כאלה ש- $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz=\frac{3}{2}$. הוכח כי

$$\sqrt{2(xyz+1)} \geq x+y+z$$

88. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$a^3+b^3+c^3+4\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+48 \geq 7(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

89. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $(a+b)(a+c)(b+c)=8$. הוכח כי

א) $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[11]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

ב) $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(M.Rozenberg, V.Nicula, 2006)

90. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

א) $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[17]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

ב) $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}}$$

ג) $$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[8]{\frac{a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b}{6}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

91. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[11]{\frac{a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b}{6}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

92. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c=3$. הוכח כי

$$\frac{1}{2+a^5b^5}+\frac{1}{2+a^5c^5}+\frac{1}{2+b^5c^5}\ge 1$$

(dduclam, 2008)

93. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc\ne 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a^2+ac+c^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}\ge\frac{5}{3(ab+ac+bc)}+\frac{4}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

(M.Rozenberg, 2009)

94. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\left(\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\ge 4$$

(M.Rozenberg, 2009)

95. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc=3$. הוכח כי

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge 8$$

(M.Rozenberg, 2006)

96. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

א) $$\sqrt[5]{\frac{a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b}{6}}\ge\sqrt[4]{\frac{a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b}{6}}$$

ב) $$\sqrt[5]{\frac{a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b}{6}}\ge\sqrt[3]{\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-2abc}{4}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

בהצלחה בהתרת התרגילים!

מיכאל רוזנברג,
בי"ס שבח, תל-אביב,
ד"א : michaelrzb@gmail.com
אוגוסט 2009.