

שיטה uvw להוכחת אי שוויונים

יהי f פונקציה סימטרית (ציקלית) של שלושה משתנים. מהות השיטה היא להקטין מספר משתנים באי שוויון $f(a,b,c) \geq 0$ ולהעביר את הכרעת הוכחת אי השוויון לחקירת פונקציה של משתנה אחד בלבד. יהי a, b, c מספרים לא שליליים ונסמן: $a+b+c=3u$, $ab+ac+bc=3v^2$, $abc=w^3$. עתה נרשום את דף הנוסחאות אשר ילווה אותנו כל הדרך כל עוד אנו נשתמש בשיטה uvw.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9u^2 - 6v^2 \quad (1)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 27u^3 - 27uv^2 + 3w^3 \quad (2)$$

$$\sum_{cyc} (a^2b + a^2c) = 9uv^2 - 3w^3 \quad (3)$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 81u^4 - 108u^2v^2 + 18v^4 + 12uw^3 \quad (4)$$

$$\sum_{cyc} (a^3b + a^3c) = 27u^2v^2 - 18v^4 - 3uw^3 \quad (5)$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 9v^4 - 6uw^3 \quad (6)$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = 243u^5 - 405u^3v^2 + 135uv^4 + 45u^2w^3 - 15v^2w^3 \quad (7)$$

$$\sum_{cyc} (a^4b + a^4c) = 81u^3v^2 - 81uv^4 - 9u^2w^3 + 15v^2w^3 \quad (8)$$

$$\sum_{cyc} (a^3b^2 + a^3c^2) = 27uv^4 - 18u^2w^3 - 3v^2w^3 \quad (9)$$

$$a^6 + b^6 + c^6 = 729u^6 - 1458u^4v^2 + 729u^2v^4 - 54v^6 + 162u^3w^3 - 108uv^2w^3 + 3w^6 \quad (10)$$

$$\sum_{cyc} (a^5b + a^5c) = 243u^4v^2 - 324u^2v^4 + 54v^6 - 27u^3w^3 + 63uv^2w^3 - 3w^6 \quad (11)$$

$$\sum_{cyc} (a^4b^2 + a^4c^2) = 81u^2v^4 - 54v^6 - 54u^3w^3 + 36uv^2w^3 - 3w^6 \quad (12)$$

$$\sum_{cyc} a^4bc = 27u^3w^3 - 27uv^2w^3 + 3w^6 \quad (13)$$

$$\sum_{cyc} a^3b^3 = 27v^6 - 27uv^2w^3 + 3w^6 \quad (14)$$

$$\sum_{cyc} (a^3b^2c + a^3c^2b) = 9uv^2w^3 - 3w^6 \quad (15)$$

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = \sum_{sym} (a^4b^2 - a^3b^3 - a^4bc + 2a^3b^2c - a^2b^2c^2) = \quad (16)$$

$$= 27(3u^2v^4 - 4v^6 - 4u^3w^3 + 6uv^2w^3 - w^6)$$

$$\prod_{cyc} (a^2 + ab + b^2) = 27(3u^2v^4 - v^6 - u^3w^3) \quad (17)$$

$$\sum_{cyc} (a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2) = 27(3u^4 - 3u^2v^2 + v^4) \quad (18)$$

$$\sum_{cyc} (a^2b - a^2c) = (a-b)(a-c)(b-c) \quad (19)$$

$$\sum_{cyc} (a^3b - a^3c) = 3u(a-b)(a-c)(b-c) \quad (20)$$

$$(21)$$

$$\sum_{cyc} (a^3b^2 - a^3c^2) = 3v^2(a-b)(a-c)(b-c) \quad (22)$$

$$\sum_{cyc} (a^5b - a^5c) = (27u^3 - 18uv^2 + w^3)(a-b)(a-c)(b-c) \quad (23)$$

$$\sum_{cyc} (a^4b^2 - a^4c^2) = (9uv^2 - w^3)(a-b)(a-c)(b-c) \quad (24)$$

דוגמא 1.

a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$(*) \quad (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geq 27$$

(M.Rozenberg, 2007)

הוכחה

נניח כי $u = tv$ ו- $abc = w^3$ ($v \geq 0$) $ab + ac + bc = 3v^2$, $a + b + c = 3u$.
 לכן $(*) \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2a^2b + 4a^2c + 3abc) \geq 27v^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 9w^3 + 3 \sum_{cyc} (a^2b + a^2c) - 27v^3 \geq \sum_{cyc} (a^2b - a^2c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 27(uv^2 - v^3) \geq (a-b)(a-c)(b-c).$$

כיוון ש- $u \geq v$, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $(a-b)(a-c)(b-c) \geq 0$.

ואז בהשתמש ב- (16) נקבל:

$$(*) \Leftrightarrow 729(uv^2 - v^3)^2 \geq 27(3u^2v^4 - 4w^6 - 4u^3w^3 + 6uv^2w^3 - w^6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w^6 - 2(3uv^2 - 2u^3)w^3 + 24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6 \geq 0.$$

כיוון ש- $24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6 \geq 0$, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $3uv^2 - 2u^3 \geq 0$.

כלומר, נשאר להוכיח את אי השוויון שלנו במקרה $1 \leq t \leq \sqrt{1.5}$.

לכן נשאר להיווכח כי $(3uv^2 - 2u^3)^2 - (24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6) \leq 0$.

$$(3uv^2 - 2u^3)^2 - (24u^2v^4 - 54uv^5 + 31v^6) \leq 0 \Leftrightarrow \text{אבל}$$

$$\Leftrightarrow 4t^6 - 12t^4 - 15t^2 + 54t - 31 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(4t^4 + 8t^3 - 8t - 31) \leq 0,$$

שזה פסוק אמת עבור $1 \leq t \leq \sqrt{1.5}$. כלומר, אי השוויון מוכח.

דרך אגב, ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון $(a + kb)(b + kc)(c + ka) \geq (k + 1)^3$ מתקיים עבור כל a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$ הוא

$$k = \frac{3\sqrt[3]{4-2+\sqrt{18\sqrt{2}-12\sqrt{4}}}}{2} = 2.333698853\dots$$

ואנו מקבלים אי שוויון $(3a + 7b)(3b + 7c)(3c + 7a) \geq 1000$ שמתקיים עם אותם אילוצים.

דוגמא 2.

הוכח כי עבור כל a, b, c מתקיים:

$$(*) \quad (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \geq \sqrt{6}(a + b + c)(a - b)(a - c)(b - c)$$

(M.Rozenberg, 2007)

הוכחה

נניח כי $a + b + c = 3u$, $ab + ac + bc = 3v^2$, (יכול להיות ש- v הוא מספר מדומה),
 $abc = w^3$ ו- $u^2 = tv^2$.

אפשר להניח גם כן כי $(a + b + c)(a - b)(a - c)(b - c) \geq 0$ אחרת, אי השוויון מתקיים. לכן בהשתמש בנוסחאות (1) ו-(16) מקבלים:

$$(*) \Leftrightarrow (9u^2 - 6v^2)^2(9u^2 - 9v^2)^2 \geq 6 \cdot 9u^2 \cdot 27(3u^2v^4 - 4v^6 - 4u^3w^3 + 6uv^2w^3 - w^6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u^2w^6 - 4(3v^2 - 2u^2)u^3w^3 + 9u^8 - 30u^6v^2 + 31u^4v^4 - 12u^2v^6 + 4v^8 \geq 0$$

כלומר, נשאר להוכיח כי $4(3v^2 - 2u^2)^2u^6 - 2u^2(9u^8 - 30u^6v^2 + 31u^4v^4 - 12u^2v^6 + 4v^8) \leq 0$

אבל $v^8 \geq 0$ ולכן $4(3v^2 - 2u^2)^2u^6 - 2u^2(9u^8 - 30u^6v^2 + 31u^4v^4 - 12u^2v^6 + 4v^8) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u^2(t^4 - 6t^3 + 13t^2 - 12t + 4) \geq 0 \Leftrightarrow u^2(t - 2)^2(t - 1)^2 \geq 0.$$

הוכחנו את אי השוויון.

השוויון מושג כאשר $a = b = c$ ולמשל, כאשר $a = \sqrt{6} - 3$, $b = \sqrt{6}$ ו- $c = \sqrt{6} + 3$.

כיוון ש- $(a - b)^2(a - c)^2(b - c)^2 \geq 0$ עבור כל a, b, c ממשיים אזי השוויון (16) נותן

$$3uv^2 - 2u^3 - 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \leq w^3 \leq 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \quad (25)$$

אביא דוגמאות אחת אך מאד אופיינית ומראה איך אי השוויון (25) עוזר בהוכחת אי שוויונים סימטריים, בהם השוויון מושג לא רק כאשר $a = b = c$.

דוגמא 3.

a, b, c מספרים חיוביים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$(*) \quad 4\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right) + 9abc \geq 21$$

(nguoinv, 2009)

הוכחה

נניח כי $a + b + c = 3u$, $ab + ac + bc = 3v^2$, $abc = w^3$ ו- $u^2 = tv^2$, אז $t \geq 1$ ובהשתמש ב-(6) נקבל

$$(*) \Leftrightarrow 4(9v^4 - 6uw^3) + 9w^6 \geq 21w^3 \Leftrightarrow$$

-4-

$$\Leftrightarrow 4(3v^4 - 2uv^3)u^2 + 3w^6 \geq 7u^3w^3 \Leftrightarrow w^6 - 5u^3w^3 + 4u^2v^4 \geq 0 .$$

$$.w^3 \leq \frac{5u^3 - \sqrt{25u^6 - 16u^2v^4}}{2} \text{ לכן נשאר להוכיח כי}$$

$$.w^3 \leq 3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \text{ נותן (25) אבל}$$

$$.3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \leq \frac{5u^3 - \sqrt{25u^6 - 16u^2v^4}}{2} \text{ לכן נשאר להוכיח כי}$$

אבל

$$3uv^2 - 2u^3 + 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3} \leq \frac{5u^3 - \sqrt{25u^6 - 16u^2v^4}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9t - 6 - 4\sqrt{\frac{(t-1)^3}{t}} \geq \sqrt{25t^2 - 16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 - 27t + 13 + \frac{4(t-1)^3}{t} \geq 6(3t-2)\sqrt{\frac{(t-1)^3}{t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14t - 13 + \frac{4(t-1)^2}{t} \geq 6(3t-2)\sqrt{\frac{t-1}{t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18t^2 - 21t + 4 \geq 6(3t-2)\sqrt{t(t-1)} \Leftrightarrow (3t-4)^2 \geq 0$$

כלומר, אי השוויון מוכח.

השוויון מושג כאשר $a = b = c$ וכאשר $a = 4b = 4c$ ובתמורות ציקליות של האחרון.

נגיד אנו צריכים להוכיח כי $f(a,b,c) \geq 0$ כאשר f היא פונקציה ממשית וסימטרית יחסית ל- a, b, c וקיימת g משלושה משתנים עבורה מתקיימים שני התנאים הבאים:

$$1. f(a,b,c) = g(u, v^2, w^3)$$

2. g היא פונקציה קעורה כפונקציה של w^3 .

אזי g מקבלת את הערך המינימלי שלה בקצה של w^3 .

כיוון ש- a, b, c הם שורשים ממשיים של משוואה $x^3 - 3ux^2 + 3v^2x = w^3$ אז תחום הערכים של w^3 הוא קטע שקצותיו מתאימים לנקודת המכסימום ולנקודת המינימום של הפונקציה

$$h(x) = x^3 - 3ux^2 + 3v^2x \text{ אשר מתאימות למקרה שוויון של שני מספרים מתוך } a, b, c \text{ ו- } c.$$

במידה והמספרים a, b, c נגיד לא שליליים, אנו נקבל אולי עוד ערך קצה של w^3 המתאים למקרה $w^3 = 0$.

אותו שיקול תקף גם לגבי g מונוטונית יחסית ל- w^3 .

הרעיון הפשוט הזה מאפשר לפעמים להוכיח אי שוויונים מאד קשים.

-4-

-5-

דוגמא 4.

a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$(*) \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2006)

הוכחה

יהי $a+b+c = 3u$, $ab+ac+bc = 3v^2$, ו- $abc = w^3 = t$. בהשתמש ב- (2) מקבלים:

$$(*) \Leftrightarrow u^{10} \geq (9u^3 - 9uv^2 + w^3)w^7 \Leftrightarrow w^{10} + (9u^3 - 9uv^2)w^7 - u^{10} \leq 0.$$

כיוון שקיבלנו אי שוויון הומוגני אפשר לשכוח מהתנאי $abc = 1$ ולהניח כי a, b ו- c לא שליליים.

כלומר, נשאר להוכיח כי $f(t) \leq 0$ כאשר $f(t) = t^{\frac{10}{3}} + (9u^3 - 9uv^2)t^{\frac{7}{3}} - u^{10}$.

אבל f היא פונקציה קמורה ולכן היא מקבלת את הערך המכסימלי שלה בקצות הערכים של $t = w^3$. זאת אומרת, נשאר לבדוק מה קורה כאשר $b = c$ וכאשר $w^3 = 0$.

אם $w^3 = 0$ אז אי השוויון $w^{10} + (9u^3 - 9uv^2)w^7 - u^{10} \leq 0$ מתקיים טריוויאלית. אם $b = c$ אז בחזר לאי השוויון המקורי, נקבל:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{b^2} + 2b}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{\frac{1}{b^6} + 2b^3}{3}} \Leftrightarrow \frac{(1+2b^3)^{10}}{b^{14}(1+2b^9)} \geq 3^9 \Leftrightarrow g(b) \geq 0,$$

כאשר $g(b) = 10 \ln(1+2b^3) - 14 \ln b - \ln(1+2b^9) - 9 \ln 3$.

$$g'(b) = \frac{60b^2}{1+2b^3} - \frac{14}{b} - \frac{18b^8}{1+2b^9} = \frac{2(x-1)(14x^3 - 9x^2 - 9x + 7)}{b(1+2b^3)(1+2b^9)}$$

קל להראות כי $14x^3 - 9x^2 - 9x + 7 \geq 0$ עבור $x > 0$ ולכן $x_{\min} = 1$, אשר נותן $g(b) \geq g(1) = 0$ ואי השוויון מוכח.

דוגמא 5.

a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c) \geq 0$$

(V.Cirtoaje)

הוכחה

נניח כי $a+b+c = 3u$, $ab+ac+bc = 3v^2$, ו- $abc = w^3$.

אזי $f(w^3) = \sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c)$ היא פונקציה קווית.

לכן f מקבלת את הערך המינימלי שלה בקצה של w^3 .

-5-

(א) $w^3 = 0$. נניח כי $c = 0$.

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c) = (a-b)^4(a+b) \geq 0$$

(ב) $b = c$.

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-2b)(a-2c) = a(a-b)^2(a-2b)^2 \geq 0$$

ואי השוויון מוכח במלואו!

דוגמא 6.

מספרים a, b, c הם אורכי צלעות של משולש. הוכח כי

$$(*) \quad \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \geq \sqrt{\frac{3}{ab+ac+bc}}$$

(Trần Quốc Anh, 2009)

הוכחה

$$\text{יהי } x+y=a+2b, x+z=b+2c, y+z=c+2a$$

$$\text{או } x = \frac{3a+b-c}{2}, y = \frac{3b+c-a}{2}, z = \frac{3c+a-b}{2}$$

$$a = \frac{5x-y+z}{9}, b = \frac{5y-z+x}{9}, c = \frac{5z-x+y}{9}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \geq \frac{9}{\sqrt{\sum_{cyc} (x^2 + 11xy)}} \quad \text{לכן } x, y, z \text{ חיוביים ו-}$$

עתה נתווה הוכחה של אי השוויון שקיבלנו עבור x, y, z לא שליליים כאלה ש- $xy + xy + xz \neq 0$.

$$\text{נניח כי } x+y+z=3u, xy+xy+xz=3v^2, xyz=w^3$$

נכפיל שני אגפים של אי השוויון האחרון במכנה משותף ונעביר את כל האיברים לאגף שמאל.

נקבל באגף שמאל פונקציה קווית של w^3 .

לכן אגף שמאל יקבל ערך מינימאלי בקצה של w^3 ויישאר לבדוק שני מיקרים:

(א) $y=z=1$ ומיקרה (ב) $z=0$.

תרגילים לעבודה עצמית

1. a, b, c לא שליליים. הוכח כי

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8}} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+bc}{3}}$$

(Carlson)

2. a, b, c ממשיים. הוכח כי

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+ac+bc)$$

(F.Shleifer, 1979)

3. a, b, c לא שליליים. הוכח כי

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{\sqrt{3}(ab + ac + bc)\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 2(ab + ac + bc)$$

(M.Rozenberg, 2009)

4. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-bc} \leq \frac{9}{2}$$

(V.Cirtoaje, 2005)

5. מצא את ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון

$$\frac{1}{1-kab} + \frac{1}{1-kac} + \frac{1}{1-kbc} \leq \frac{9}{3-k}$$

מתקיים עבור כל a, b, c לא שליליים ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

(M.Rozenberg, 2009)

6. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + ac + bc$$

(Russia, 2002)

7. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq \sqrt[3]{(ab + ac + bc)^5}$$

(M. Rozenberg, 2009)

8. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$4(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 3(ab + ac + bc + 1)$$

(M.Rozenberg, nguoin, 2009)

9. מצא את ה- k המינימלי עבורו אי השוויון

$$k(3 - xy - xz - yz) \geq 1 - xyz$$

מתקיים עבור כל x, y, z לא שליליים כאלה ש- $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

(M.Rozenberg, 2005)

10. הוכח כי עבור כל x, y, z לא שליליים כאלה ש- $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ מתקיים:

$$8 + xyz \geq 3(xy + xz + yz)$$

11. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

(V.Cirtoaje, 2004)

12. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{2+3a^3} + \frac{1}{2+3b^3} + \frac{1}{2+3c^3} \geq \frac{3}{5}$$

(M.Rozenberg, 2009)

13. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{3+5a^4} + \frac{1}{3+5b^4} + \frac{1}{3+5c^4} \geq \frac{3}{8}$$

(M.Rozenberg, 2009)

14. a, b, c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b)(a+c)(b+c)(a+b+c)^2 \geq 24abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

(T.Sloyan, 2005)

15. הוכח כי עבור כל x, y, z ו- r ממשיים מתקיים

$$\sum_{cyc} (x^4 - (r+1)(x^3y + x^3z) + r(r+1)x^2y^2 + (1-r^2)x^2yz) \geq 0$$

(V.Cirtoaje, 2006)

16. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[16]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

(M. Rozenberg, 2006)

17. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[29]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

(M.Rozenberg, 2006)

18. a, b, c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$a^2 + b^2 + c^2 + 15(ab + ac + bc) \geq 16(a + b + c)$$

(M.Rozenberg, 2006)

19. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 12(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)$$

(V.Cirtoaje, 2005)

20. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 12(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b) + 171$$

(M.Rozenberg, 2009)

21. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a+b+c = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

(Romania, 2006)

22. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

$$5(a+b+c) + \frac{3}{abc} \geq 18$$

(V.Cirtoaje, 2006)

23. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^5 \geq 81(a^2 + b^2 + c^2)abc$$

(V.Cirtoaje, 2005)

24. a, b ו- c מספרים ממשיים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} + \frac{ac}{a^2 + c^2 + 3b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 + 3a^2} \leq \frac{3}{5}$$

(V.Cirtoaje, Pham Kim Hang, 2005)

25. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a+b+c = 3$. הוכח כי

$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \geq 10(a^2 + b^2 + c^2)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

26. מצא את הערך המינימלי של M עבורו אי השוויון

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

מתקיים עבור כל ערכים a, b ו- c.
(IMO, 2006)

27. מצא את הערך המכסימלי של M עבורו אי השוויון
 $a^3 + b^3 + c^3 \geq M(a-b)(a-c)(b-c)$
 מתקיים עבור כל ערכים a, b, c לא שליליים.

28. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{5}{2}$$

(Hojoo Lee)

29. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b+c} \geq 3$$

(Pham Kim Hang, 2007)

30. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{3}{a+b+c} \geq 4 \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+b+c} \geq 2 \quad (\text{ב})$$

(M.Rozenberg, 2009)

31. a, b, c חיוביים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$\frac{12}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3}{abc} \geq 7$$

(V.Cirtoaje, 2005)

32. a, b, c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$1 + \frac{8}{a+b+c} \geq \frac{11}{ab+ac+bc}$$

(M.Rozenberg, 2006)

33. a, b, c מממשיים. הוכח כי

$$(ab + ac + bc)^2 (a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + 2bc)(b^2 + 2ac)(c^2 + 2ab)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

34. a, b, c לא שליליים. הוכח כי

$$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 \geq 18(a^2 - bc)(b^2 - ac)(c^2 - ab)$$

(V.Cirtoaje, 2006)

35. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $a + b + c = 1$. הוכח כי

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{25}{1 + 48abc}$$

36. a, b ו- c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי $13(a + b + c) + 6abc \geq 45$

(M.Rozenberg, 2006)

37. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. הוכח כי $(2 - 3ab)(2 - 3ac)(2 - 3bc) \geq 1$

(V.Cirtoaje, 2006)

38. הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ מתקיים: $2(a + b + c) - abc \leq 10$

39. הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ מתקיים: $a + b + c - 2abc \leq \sqrt{2}$

40. הוכח כי עבור כל a, b ו- c ממשיים מתקיים: $(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2) \geq (ab + ac + bc)^3$
(M.Rozenberg, 2007)

41. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי $(ab + ac + bc) \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$
(Ji Chen, 1995)

42. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי $\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{a^2 + ac + c^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2}$
(V.Cirtoaje, 2000)

43. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 1$. הוכח כי $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{8}{a+b+c} \geq 6$
(Pham Kim Hang, 2007)

44. a, b ו- c לא שליליים, $a + b + c = 3u$, $ab + ac + bc = 3v^2$, $abc = w^3$ ו- $v \geq 0$. הוכח כי עבור כל $k \geq 3 + 2\sqrt{3}$ מתקיים: $ku + w \geq (k + 1)v$
(M.Rozenberg, 2007)

45. l_a, l_b, l_c אורכי חוצי זווית של משולש בעל שטח S . הוכח כי

$$l_a l_b + l_a l_c + l_b l_c \geq 3\sqrt{3}S$$

(W.Janous)

46. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. הוכח כי

$$a^4 + b^4 + c^4 + 4(a+b+c) \leq 9 + 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

47. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} + \frac{12(a+b)(a+c)(b+c)}{(a+b+c)^3} \geq \frac{41}{9}$$

(Pham Huu Duc, 2006)

48. a, b, c חיוביים, כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2(ab + ac + bc) \geq 9$$

(Pham Kim Hang, 2007)

49. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$8(a+b+c)^2 \geq 9(a+b)(a+c)(b+c)$$

(M.Rozenberg, 2007)

50. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{a}{b^3 + c^3} + \frac{b}{a^3 + c^3} + \frac{c}{a^3 + b^3} \geq \frac{18}{5(a^2 + b^2 + c^2) - ab - ac - bc}$$

(M.Rozenberg, 2007)

51. a, b, c מספרים ממשיים. הוכח כי

$$3(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2) \geq (a+b+c)^2(ab + ac + bc)^2$$

(M.Rozenberg, 2009)

52. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. הוכח כי

$$a^3 b^2 + b^3 c^2 + c^3 a^2 \leq 3$$

53. a, b, c מספרים לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. הוכח כי

$$\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{2b+a+c} + \frac{c^2}{2c+a+b} \geq \frac{3}{4}$$

(M.Rozenberg, 2008)

54. a, b ו-c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2(a+b+c)}$$

(M.Rozenberg, 2008)

55. a, b ו-c לא שליליים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + ac + bc)$. הוכח כי

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{2abc}$$

(M.Rozenberg, 2008)

56. a, b ו-c מספרים ממשיים. הוכח כי

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (b+c)^4 \geq \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4 + (a+b+c)^4)$$

(Vo Quoc Ba Can, 2007)

57. a, b ו-c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c = 3$. הוכח כי

$$a^5 + b^5 + c^5 + 6 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

(M.Rozenberg, 2008)

58. a, b ו-c לא שליליים. הוכח כי

$$(a^4 + b^4 + c^4)(a^3 + b^3 + c^3)(a+b+c) \geq 9abc(a^5 + b^5 + c^5)$$

59. a, b ו-c לא שליליים. הוכח כי

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) \geq 3\sqrt{3abc(a^3 + b^3 + c^3)}$$

60. a, b ו-c חיוביים. הוכח כי

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 3 \geq 9\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

V. a, b ו-c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(Vo Quoc Ba Can, 2007)

62. a, b ו-c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} \geq 6 \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc} \right)^{\frac{4}{5}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

63. a, b ו-c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt{\frac{15(a^2+b^2+c^2)}{ab+ac+bc}} - 6$$

(M.Rozenberg, 2008)

64. הוכח כי ה- k המכסימלי עבורו אי השוויון

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2} \geq 3+k$$

מתקיים עבור כל a, b ו-c חיוביים, הוא $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$.

(Bach Ngoc Thanh Cong, 2007)

65. a, b, c ו-d לא שליליים. נסמן $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 6v^2$, $a+b+c+d = 4u$

ו- $abc+abd+acd+bcd = w^3$. הוכח כי

$$3u^2v^4 - 4v^6 - 4u^3w^3 + 6uv^2w^3 - w^6 \geq 0$$

(M.Rozenberg, 2008)

66. a, b, c ו-d לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 6$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[22]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}$$

(M.Rozenberg, 2008)

67. a, b, c ו-d לא שליליים כאלה ש- $abc+abd+acd+bcd = 4$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[13]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{4}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

68. a, b ו-c לא שליליים, $abc = w^3$, $a^3+b^3+c^3 = 3p^3$, $a+b+c = 3u$

הוכח כי $2p+5w \leq 7u$

(Vo Quoc Ba Can, 2008)

69. a, b ו- c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. מצא את הערך המינימלי של הביטוי:

$$\frac{(a+b+c)^4}{a^2+b^2+c^2}$$

(V.Cirtoaje, 2008)

70. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \geq \frac{5(a^2+b^2+c^2)}{2(a^3+b^3+c^3)+4abc}$$

71. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c = 3$. הוכח כי

$$(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+ac+bc) \leq 9$$

(dduclam, 2008)

72. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 1 \geq \frac{21(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

(Vo Quoc Ba Can, 2008)

73. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a+b+c = 1$ ו- $ab+ac+bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{27}{2}abc \geq 5$$

(M.Rozenberg, 2008)

74. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{3a+b+c} + \frac{1}{3b+a+c} + \frac{1}{3c+a+b} \leq \frac{3}{5}$$

(M.Rozenberg, 2008)

75. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \geq \frac{6(a+b+c)}{3(a^2+b^2+c^2)+ab+ac+bc}$$

(M.Rozenberg, 2009)

76. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab+ac+bc = 3$. הוכח כי

$$a+b+c+2(a^2b+b^2c+c^2a) \geq 9 \quad (\text{א})$$

$$a^2+b^2+c^2+17(a^2b+b^2c+c^2a) \geq 54 \quad (\text{ב})$$

(M.Rozenberg, 2009)

77. a, b, c ממשיים כאלה ש- $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. הוכח כי
 $(5 - 2a)(5 - 2b)(5 - 2c) \geq 27$
 (M.Rozenberg, 2009)

78. a, b, c ממשיים כאלה ש- $a^2b + b^2c + c^2a = 0$. הוכח כי
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} - 1}(ab + ac + bc)$
 (M.Rozenberg, 2009)

79. a, b, c ממשיים כאלה ש- $a^3b + b^3c + c^3a = 0$. הוכח כי
 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3(ab + ac + bc)$
 (M.Rozenberg, 2009)

80. a, b, c חיוביים. הוכח כי
 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{37(a^2 + b^2 + c^2) - 19(ab + ac + bc)}{6(a + b + c)}$
 (M.Rozenberg, 2009)

81. $a + b + c = 3$ ו- $abc \geq -4$. הוכח כי
 $5(ab + ac + bc) \leq 12 + 3abc$
 (Bulgaria, 2009)

82. a, b, c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי
 א) $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[5]{\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}}$
 ב) $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[11]{\frac{a^3b + b^3c + c^3a}{3}}$
 (M.Rozenberg, 2009)

83. a, b, c לא שליליים. הוכח כי
 $\sum_{cyc} a^2(a - b)(a - c)(3a - 5b)(3a - 5c) \geq 0$
 (V.Cirtoaje, 2009)

84. a, b, c לא שליליים. הוכח כי
 $\sum_{cyc} (10a^4 - 33a^3b - 33a^3c + 64a^2b^2) \geq 0$
 (V.Cirtoaje, 2009)

85. a, b, c -1 לא שליליים. הוכח כי

$$(a+b+c)^8 \geq 128(a^5b^3 + a^5c^3 + b^5a^3 + b^5c^3 + c^5a^3 + c^5b^3)$$

(M.Rozenberg, 2009)

86. a, b, c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$8(a+b+c)^4 \geq 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

(Pham Kim Hang, 2009)

87. x, y, z -1 לא שליליים כאלה ש- $\frac{3}{2} = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$. הוכח כי

$$\sqrt{2(xyz + 1)} \geq x + y + z$$

88. a, b, c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + 48 \geq 7(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

89. a, b, c -1 לא שליליים כאלה ש- $(a+b)(a+c)(b+c) = 8$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[11]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \quad (\text{א})$$

(M.Rozenberg, 2009)

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}} \quad (\text{ב})$$

(M.Rozenberg, V.Nicula, 2006)

90. a, b, c חיוביים כאלה ש- $abc = 1$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[17]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}} \quad (\text{א})$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[27]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[8]{\frac{a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b}{6}} \quad (\text{ג})$$

(M.Rozenberg, 2009)

91. a, b, c -1 לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[11]{\frac{a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b}{6}}$$

(M.Rozenberg, 2009)

92. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $a + b + c = 3$. הוכח כי

$$\frac{1}{2+a^5b^5} + \frac{1}{2+a^5c^5} + \frac{1}{2+b^5c^5} \geq 1$$

(dduclam, 2008)

93. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc \neq 0$. הוכח כי

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{a^2 + ac + c^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{5}{3(ab + ac + bc)} + \frac{4}{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

(M.Rozenberg, 2009)

94. a, b ו- c חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \left(\frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \geq 4$$

(M.Rozenberg, 2009)

95. a, b ו- c לא שליליים כאלה ש- $ab + ac + bc = 3$. הוכח כי

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8$$

(M.Rozenberg, 2006)

96. a, b ו- c לא שליליים. הוכח כי

$$\sqrt[5]{\frac{a^4b + a^4c + b^4a + b^4c + c^4a + c^4b}{6}} \geq \sqrt[4]{\frac{a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b}{6}} \quad (\text{א})$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4b + a^4c + b^4a + b^4c + c^4a + c^4b}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b - 2abc}{4}} \quad (\text{ב})$$

(M.Rozenberg, 2009)

בהצלחה בהתרת התרגילים!

מיכאל רוזנברג,

בי"ס שבח, תל-אביב,

ד"א : michaelrzb@gmail.com

אוגוסט 2009.