שיטת SOS

זאת אחת השיטות להוכחת אי שווינים החזקות ביותר. SOS הוא קיצור מ- sum of squares .
משמעות השיטה היא שאם נצליח לייצג אי שוויון משלושה משתנים, למשל, בצורה הבאה:

$$(1)\quad (a-b)^2 S_c + (a-c)^2 S_b + (b-c)^2 S_a \geq 0$$

כאשר S_a, S_b ו- S_c הם פונקציות של a, b ו- c אז לפעמים אנו נוכל להוכיח את אי השוויון הנתון.

אנו נרבה להשתמש בסימן $\sum\limits_{cyc}$, שמבטא את הסכום הציקלי וגם בסימן $\sum\limits_{sym}$, שמבטא את הסכום הסימטרי במובנים הבאים:
אם מדובר בשלושה משתנים a, b ו- c אז

$\sum\limits_{cyc} a = a+b+c$ ואילו $\sum\limits_{sym} a = 2a+2b+2c$,

$\sum\limits_{cyc} a^2b = a^2b+b^2c+c^2a$ ואילו $\sum\limits_{sym} a^2b = a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$,

$\sum\limits_{cyc} abc = 3abc$ ואילו $\sum\limits_{sym} abc = 6abc$.

בין הדוגמאות לאי שוויונים שיבואו עתה יש כאלה, שאפשר להוכיח בקלות על ידי שיטות אחרות ויש כאלה, שאני לפחות, לא מצליח להוכיח בעמצעות שום שיטה אחרת חוץ משיטת SOS.
מטרה של הדוגמאות להראות מהם הכלים להוכחת אי שוויונים שעומדים ברשותינו מרגע זה.

דוגמה 1.
הוכח כי עבור כל המספרים הלא שליליים a, b ו-c מתקיים:

$$(*)\, a^3+b^3+c^3-a^2b-a^2c-b^2a-b^2c-c^2a-c^2b+3abc \geq 0$$

הוכחה

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^3-a^2b-a^2c+abc) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(2a^3-2a^2b-2a^2c+2abc) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^3-a^2b-ab^2+b^3) - \sum_{cyc}(a^2c-2abc+b^2c) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(a+b) - \sum_{cyc}(a-b)^2 c \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(a+b-c) \geq 0.$$

כלומר, הצלחנו לייצג את אי השוויון שלנו בצורה (1).
$S_a = b+c-a$, $S_b = a+c-b$ ו- $S_c = a+b-c$.
כיוון שאי השוויון שלנו סימטרי יחסית ל a, b ו- c (אינו משתנה אחרי כל התמורות של a, b ו- c),
אפשר להניח כי $a \geq b \geq c$.
אזי $S_b \geq 0$, $S_c \geq 0$ ו- $(a-c)^2 \geq (b-c)^2$. לכן

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b-c) \geq (a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(a+c-b)+(b-c)^2(b+c-a) =$$
$$= (a-b)^2 S_c + (S_a+S_b)(b-c)^2 = (a-b)^2(a+b-c)+2c(b-c)^2 \geq 0.$$

כלומר, אי השוויון הוכח.

באותה דרך ניתן להוכיח את הטענה הבאה, שהיא כללית יותר:
אם $a \ge b \ge c$, $S_b \ge 0$, $S_c \ge 0$ ו- $S_a + S_b \ge 0$ אז אי השוויון (1) מתקיים.

דוגמה 2.
יצג את אי השוויון $x^3y + y^3z + z^3x \ge xyz(x+y+z)$ (*) בצורה (1).

פתרון

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{cyc}(x^3y - x^2yz) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(x^3y - x^2y^2 + \frac{1}{2}\cdot(z^2x^2 - 2z^2xy + z^2y^2)) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x^2y(x-y) - \frac{1}{4}\cdot(x^4 - y^4) + \frac{1}{2}\cdot z^2(x-y)^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(2z^2(x-y)^2 - (x-y)(x^4 - 3x^2y + xy^2 + y^3)) \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2(2z^2 - x^2 + y^2 + 2xy) \ge 0.$$

כלומר, רשמנו את אי השוויון בצורה (1).

עוד דרך: $\sum_{cyc}(x^3y - x^2yz) = \sum_{cyc}(x^3y - 2x^2yz + z^2xy) = \sum_{cyc} xy(x-z)^2 = \sum_{cyc} yz(x-y)^2$

רואים שלייצג אי שוויון בצורה (1) אפשר לפעמים בכמה דרכים ורצוי לבחור בדרך כזו, שבאמצעותה כן נצליח להוכיח את אי השוויון.

דוגמה 3.
הוכח כי עבור כל המספרים החיוביים a, b ו- c מתקיים:
$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b^2-ac}{\sqrt{b^2+ac}} + \frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+ab}} \ge 0$$

הוכחה

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+bc}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{2a^2-2bc}{\sqrt{a^2+bc}} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a+c)+(a+b)(a-c)}{\sqrt{a^2+bc}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{(a-b)(a+c)}{\sqrt{a^2+bc}} - \frac{(c-a)(a+b)}{\sqrt{a^2+bc}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{(a-b)(a+c)}{\sqrt{a^2+bc}} - \frac{(a-b)(b+c)}{\sqrt{b^2+ac}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)\left((a+c)^2(b^2+ac) - (b+c)^2(a^2+bc)\right)}{\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ac)}\cdot\left((a+c)\sqrt{b^2+ac} + (b+c)\sqrt{a^2+bc}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\left(c^3 + (a+b)c^2 + (a^2-ab+b^2)c\right)}{\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ac)}\cdot\left((a+c)\sqrt{b^2+ac} + (b+c)\sqrt{a^2+bc}\right)} \ge 0 \ .$$

כלומר, אי השוויון הוכח.

דוגמה 4.

הוכח כי עבור כל המספרים החיוביים a, b ו- c כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$ מתקיים:

$$(*)\ \frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq 3$$

הוכחה

$$\textbf{(*)}\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\geq\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\left(\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+c-a-b\right)}{a+b}\geq 0.$$

אבל $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+c-a-b\geq a+b+c+c-a-b=2c\geq 0.$

כלומר, אי השוויון הוכח.

דוגמה 5.

הוכח כי עבור כל המספרים החיוביים a, b ו- c כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$ מתקיים:

$$(*)\ \frac{1}{5-6ab}+\frac{1}{5-6ac}+\frac{1}{5-6bc}\leq 1$$

הוכחה

$$(*)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5-6ab}\right)\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2-6ab}{5-6ab}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2+2c^2-a^2-b^2}{5-6ab}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2}{5-6ab}+\sum_{cyc}\left(\frac{(c-a)(a+c)}{5-6ab}-\frac{(b-c)(b+c)}{5-6ab}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2}{5-6ab}+\sum_{cyc}\left(\frac{(a-b)(a+b)}{5-6bc}-\frac{(a-b)(a+b)}{5-6ac}\right)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2}{5-6ab}-\sum_{cyc}\frac{6c(a-b)^2(a+b)}{(5-6ac)(5-6bc)}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{5-6ab}-\frac{2(a+b)c}{(5-6bc)(5-6ac)}\right)\geq 0.$$

נניח כי $a\geq b\geq c$. לכן $(a-c)^2\geq(b-c)^2$ כמו כן אנו מקבלים:

$$S_c=\frac{1}{5-6ab}-\frac{2c(a+b)}{(5-6ac)(5-6bc)}\geq\frac{1}{5-6ac}-\frac{2c(a+b)}{(5-6ac)(5-6bc)}=\frac{5-8bc-2ac}{(5-6ac)(5-6bc)}=$$

$$=\frac{5a^2+5b^2+5c^2-2ac-8bc}{(5-6ac)(5-6bc)}=\frac{4(b-c)^2+(a-c)^2+4a^2+b^2}{(5-6ac)(5-6bc)}\ge 0.$$

$$S_b=\frac{1}{5-6ac}-\frac{2(a+c)b}{(5-6ab)(5-6bc)}\ge\frac{1}{5-6bc}-\frac{2(a+c)b}{(5-6ab)(5-6bc)}=$$

$$=\frac{5-8ab-2bc}{(5-5ab)(5-6bc)}=\frac{4(a-b)^2+(b-c)^2+a^2+4c^2}{(5-5ab)(5-6bc)}\ge 0.$$

כלומר, $\sum_{cyc}(a-b)^2S_c\ge(a-b)^2S_c+(b-c)^2(S_a+S_b)$.

לכן נשאר להוכיח כי $S_a+S_b\ge 0$.

אבל $$S_a+S_b=\frac{1}{5-6bc}-\frac{2a(b+c)}{(5-6ab)(5-6ac)}+\frac{1}{5-6ac}-\frac{2b(a+c)}{(5-6ab)(5-6bc)}=$$

$$=\frac{1}{5-6ac}-\frac{2a(b+c)}{(5-6ab)(5-6ac)}+\frac{1}{5-6bc}-\frac{2b(a+c)}{(5-6ab)(5-6bc)}=$$

$$=\frac{5-8ab-2ac}{(5-6ab)(5-6ac)}+\frac{5-8ab-2bc}{(5-6ab)(5-6bc)}=\frac{4(a-b)^2+(a-c)^2+b^2+4c^2}{(5-6ab)(5-6ac)}+$$

$$+\frac{4(a-b)^2+(b-c)^2+a^2+4c^2}{(5-6ab)(5-6bc)}\ge 0.$$

כלומר, אי השוויון הוכח.

הטענה הבאה לפעמים עוזרת.

<u>למה.</u> אם $x+y+z\ge 0$ ו- $xy+xz+yz\ge 0$ אז עבור כל a, b ו- c מתקיים:

$$(*)\ (b-c)^2x+(a-c)^2y+(a-b)^2z\ge 0$$

הוכחה

אם x, y ו- z לא שליליים אז אי השווין (*) מתקיים.

בלי לפגוע בכלליות אפשר להניח כי $y\le 0$. לכן $x+z\ge -y\ge 0$.

יהי $b-c=p$ ו- $c-a=q$.

אז $(*)\Leftrightarrow p^2x+q^2y+(p+q)^2z\ge 0\Leftrightarrow (x+z)p^2+2zpq+(y+z)q^2\ge 0$

אם $x+z=0$ אז קל להראות שזאת אפשרי כאשר $x=y=z=0$. לכן ניתן להניח כי $x+z>0$.

ומכאן מקבלים $\frac{\Delta}{4}=z^2-(x+z)(y+z)=-(xy+xz+yz)\le 0$

כלומר, אי השוויון (*) הוכח.

דוגמה 6.

ידוע כי a>0, b>0 ו- c>0. הוכח כי

$$(*)\ \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

הוכחה

$$(*)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right)\ge\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-2(a+b+c)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b} \ge \frac{4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{a+b+c} \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b+c}\right) \ge 0 .$$

מקבלים $S_a+S_b+S_c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{6}{a+b+c}\ge 0$. כמו כן

$$\sum_{cyc}S_aS_b=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b+c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b+c}\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{ac}-\frac{2(a+c)}{ac(a+b+c)}+\frac{4}{(a+b+c)^2}\right)=$$

$$=\sum_{cyc}\left(\frac{a}{abc}-\frac{4ab}{abc(a+b+c)}+\frac{4}{(a+b+c)^2}\right)=\frac{(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+ac+bc)+12abc}{abc(a+b+c)^2}=$$

$$=\frac{\sum_{cyc}\left(a^3-a^2b-a^2c+2abc\right)}{abc(a+b+c)^2}\ge 0 .$$

כלומר, מפעילים את הלמה ואי השוויון הוכח.

דוגמה 7.

a, b ו- c הם מספרים חיוביים. הוכח כי

$$(*)\ \frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

הוכחה

$$(*)\ \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{a}{3}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a+2b)}{2a^2-ab+2b^2}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a(a-b)(a+2b)}{2a^2-ab+2b^2}-(a-b)\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(2b-a)}{2a^2-ab+2b^2}\ge 0 .$$

כלומר, אם $\left\{\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right\}\subseteq(0,2]$ אז אי השוויון הוכח.

נניח כי $a=\max\{a,b,c\}$.

א. $a\ge b\ge c$. אז $\frac{c}{a}\in(0,2]$.

1) $a\ge 2b$. במקרה הזה מתקיים: $\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{2}$ ו- $\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{b}{3}$

כיוון ש- $\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{2}\Leftrightarrow a\ge 2b$ ו- $\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{b}{3}\Leftrightarrow b\ge c$.

לכן $\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\ge\frac{a+b+c}{3}$,

כיוון ש- $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\ge\frac{a+b+c}{3}\Leftrightarrow a\ge 2c$. כלומר, במקרה הזה הוכחנו את (*).

2) $b\ge 2c$. אז $\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{3}$ ו- $\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}\ge\frac{b}{2}$.

ולכן $\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\ge\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\ge\frac{a+b+c}{3}$.

כלומר, הוכחנו את (*) במקרה $a\ge b\ge c$.

ב. $a \ge c \ge b$. אז $\left\{\frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} \subseteq (0,2]$. לכן נשאר להוכיח את (*) במקרה $a \ge 2b$.

ראינו כבר כי $\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2} \ge \frac{a}{2}$. כמו כן מתקיים: $\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2} \ge \frac{b}{3}-\frac{c}{9}$

משום ש- $2t^3-7t^2+5t+3 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2} \ge \frac{b}{3}-\frac{c}{9}$ כאשר $t=\frac{c}{b} \ge 1$.

אבל אכן $2t^3-7t^2+5t+3=(t-2)^2(2t+1)+t-1 \ge 0$.

כלומר, $\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2} \ge \frac{a}{2}+\frac{b}{3}-\frac{c}{9}+\frac{c^3}{2c^2-ac+2a^2}$.

אבל $6x^3-19x^2+14x+2 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{3}-\frac{c}{9}+\frac{c^3}{2c^2-ac+2a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$

כאשר $x=\frac{a}{c} \ge 1$ וקל לבדוק כי אכן $6x^3-19x^2+14x+2 \ge 0$ עבור $x \ge 1$.

כלומר, אי השוויון (*) הוכח.

עוד שתי טענות לאוסף, שעוזרות לעתים רחוקות.

אם $a \ge b \ge c$ אז

1) $(a-c)^2=(a-b+b-c)^2=(a-b)^2+2(a-b)(b-c)+(b-c)^2 \ge (a-b)^2+(b-c)^2$.

לכן אם $S_b \ge 0$, $S_a+S_b \ge 0$ ו- $S_c+S_b \ge 0$ אז מתקיים אי שוויון (1).

2) $(a-c)^2=(a-b+b-c)^2 \le 2(a-b)^2+2(b-c)^2$.

לכן אם $S_a \ge 0$, $S_c \ge 0$, $S_a+2S_b \ge 0$ ו- $S_c+2S_b \ge 0$ אז (1) מתקיים.

תרגילים לעבודה עצמית

1. a, b ו- c אורכי צלעות של משולש. הוכח כי

א) $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+3$

ב) $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+3$

2. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ac}{2b^2+a^2+c^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \ge 0$$

3 . a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}+\frac{b^2-ac}{\sqrt{2b^2+a^2+c^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{2c^2+a^2+b^2}} \ge 0$$

4. a, b ו- c מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+ac\sqrt{2(a^2+c^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}$$

5. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

6. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

7. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^5}{a^4+b^4}+\frac{b^5}{b^4+c^4}+\frac{c^5}{c^4+a^4}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

8. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

9. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(a+c)}{a^2+ac+c^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge 2$$

10. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{ab+ac-bc}{b^2+c^2}+\frac{ab+bc-ac}{a^2+c^2}+\frac{ac+bc-ab}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}$$

11. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+ac+bc}+2$$

***12.** a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a^3+b^3+c^3=3$. הוכח כי

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

13. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=3$**.** הוכח כי

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc}\ge 18$$

14. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(a+c)}{a^2+c^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\ge a+b+c$$

15. a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכח כי

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 6\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2b+a+c}+\frac{1}{2c+a+b}\right)$$

16. הוכח כי עבור כל המספרים החיוביים a, b ו- c מתקיים:

$$\frac{a^2+2bc}{b+c}+\frac{b^2+2ac}{a+c}+\frac{c^2+2ab}{a+b}\ge\frac{3}{2}\cdot(a+b+c)$$

17. $x>0$ **,** $y>0$ ו- $z>0$. הוכח כי

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{x+z}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\ge 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+z}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)$$

18. הוכח כי בכל משולש מתקיים:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\delta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\delta}+\frac{\cos^2\delta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\ge\frac{1}{2}$$

19. a, b ו- c הם אורכי צלעות של משולש ו- p הוא חצי ההיקף שלו. הוכח כי

$$3\left(\sqrt{bc(p-a)}+\sqrt{ac(p-b)}+\sqrt{ab(p-c)}\right)\ge 2p\left(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\right)$$

20*. הוכח כי עבור כל המספרים הלא שליליים a, b ו- c מתקיים:

$$a^5+b^5+c^5+2(ab+ac+bc)abc\ge a^4b+b^4c+c^4a+2(a^2+b^2+c^2)abc$$

21*. a, b ו- c הם מספרים לא שליליים. הוכח כי

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\ge\frac{9}{2}\cdot(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$$

22*. a, b ו- c הם מספרים לא שליליים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=abc$. הוכח כי

$$ab+ac+bc+18\ge 5(a+b+c)$$

23. הוכח כי עבור כל המספרים החיוביים a, b ו- c מתקיים:

$$\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{ac}{(b+a)(b+c)}+\frac{bc}{(a+b)(a+c)}\le\frac{(ab+ac+bc)^2}{4abc(a+b+c)}$$

24*. הוכח כי עבור כל המספרים הממשיים a, b ו- c מתקיים:

$$6\cdot\sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+4ab+b^2)\ge 0$$

25*. הוכח כי בכל משולש מתקיים:

$$\frac{R}{2r}\ge 1+\frac{3+\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{ab+ac+bc}$$

26*. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$1+\frac{8}{a+b+c}\ge\frac{11}{ab+ac+bc}$$

27. $a+b+c=3$. הוכח כי

$$3(a^4+b^4+c^4)+a^2+b^2+c^2+6\ge 6(a^3+b^3+c^3)$$

28. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $a^2+b^2+c^2=1$. הוכח כי

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}-\frac{1}{ab+ac+bc}\le\frac{1}{2}$$

29. הוכח כי $9(a^4+b^4+c^4)^2\ge(a^5+b^5+c^5)(a+b+c)^3$

30. a, b ו- c מספרים חיוביים כאלה ש- $abc=1$. הוכח כי

$$a^3+b^3+c^3+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+21\ge3(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

כל 30 התרגילים לעיל אפשר לפתור על ידי שיטת SOS. ברור, שכמה מאי השוויונים ניתנים להוכחה על ידי שיטות אחרות ורצוי לעשות זאת במידה ו- SOS אינו עוזר לכם.
התרגילים נלקחו ברובם מהפורום:
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/index.php?f=52
והתרגילים, שמסומנים ב- * שייכים לי.
אם מישהו רוצה לדון בקשר למאמר הזה, אפשר לעשות זאת דרך הפורום שאוזכר לעיל, כלומר, לכתוב מכתב אישי ל- arqady שהוא אני. רצוי לכתוב בעברית או ברוסית.

תיהנו בהתרת התרגילים!
מיכאל רוזנברג, ביה"ס שבח, תל-אביב.
21.10.2006