ועוד על מטבעות

כל השאלות על מטבעות הן שאלות קומבינטוריות, שקשורות לברירה ובדיקה. רובם נפתרות באמצעות מידע, אבל לא כולם.
ברוב השאלות משתמשים בדגם העתיק של המאזניים, כאשר יש למאזניים שני כפות ואפשר לשים משקל מסוים על כל כף, והמאזניים נותנות אחד מ-3 תשובות אפשריות: קטן יותר, גדול יותר או שווה.
יש בעיות שבהן משתמשים בדגם חדיש יותר של המאזניים: על המאזניים יש רק כף אחד, מניחים עליו דברים, והמאזניים מראות את המשקל הכולל המדויק. כאן נדבר על המאזניים מהדגם החדיש.

בעיה 1. יש 10 שקי מטבעות, מתוכם 9 מלאים במטבעות אמיתיים (שמשקלם 10 גרם) ואחד מלא במטבעות מזויפים (שמשקלם 11 גרם). כמה שקילות צריך במאזניים מדגם חדיש בשביל להגיד איזה שק מלא במטבעות מזויפים?

תשובה: מספיק שקילה אחת. נשים על המאזניים מטבע אחת משק ראשון , 2 מטבעות משק שני, 3 מטבעות משק שלישי, ... , ועוד 10 מטבעות מהשק העשירי. אז המשקל הכולל יהיה $(1+2+3+\ldots+10)\cdot 10$ ועוד המספר הסידורי של השק המזויף של גרמים.

כיצד הצלחנו למצוא אחת מ-10 אפשרויות בשקילה אחת בלבד. והסיבה היא: שכל שקילה נותנת מספר ממשי, שבו יש אינסוף מידע. בשקילה אחת אפשר לפתור אפילו שאלה יותר קשה:

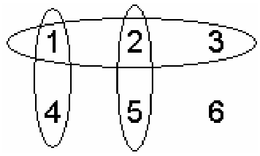
בעיה 2. יש 10 שקי מטבעות, מתוכם יש כאלה שמלאים במטבעות אמיתיים (שמשקלם 10 גרם) ויש כאלה שמלאים במטבעות מזויפים (שמשקלם 11 גרם). בכל שק יש לפחות 1024 מטבעות.
כיצד לאתר את השקים המזויפים?

לא נסביר כיצד לפתור את השאלה בשקילה אחת, אבל ניתן רמז: להשתמש בחזקות של 2.

בגרסת תרגול של תחרות הערים ה-27, סתיו, הופיעה שאלה שהיא גם מדברת על במאזניים מהסוג הזה.

בעיה 3. נתונים 6 מטבעות שאחד מהם מזויף (משקלו שונה ממשקל המטבעות התקינים, אבל המשקלים לא ידועים). בעזרת מאזניים שמראים את המשקל הכולל של המונח עליהם, כיצד ניתן לאתר את המטבע המזויף ב-3 שקילות?

לבעיה הזאת יש הרבה פתרונות, למשל פתרון כזה:



פתרון.

בשקילה ראשונה נשקול מטבעות 1 ו-4 ונקבל משקל A.
בשקילה שנייה נשקול מטבעות 2 ו-5 ונקבל משקל B.
בשקילה שלישית נשקול מטבעות 1, 2, ו-3 ונקבל משקל C.

ברור, שאם $A=B$ אז מטבע מזויף הוא 3 או 6. אז אם גם $A=\frac{2}{3}C$ נקבל שמטבע 3 הוא מזויף ומטבע 6 אמיתי, ואם לא – אז להפך.

נשאר לבדוק את האפשרות ש- $A\neq B$. נסמן את משקל של מטבע אמיתי ב-W, ושל מטבע מזויף $W+D$ (כאשר D יכול להיות שלילי או חיובי, אבל לא 0). אז המספרים A, B שווים למספרים $2W$, $2W+D$ אבל לא ברור איזה מהם איזה.
המספר $\frac{2}{3}C$ הוא $2W$ אם המטבע מסוים הוא 4, 5, או 6 ואם המטבע מזויף הוא 1, 2, או 3 אז הוא שווה $2W+\frac{2}{3}D$.
כלומר אם המטבע המזויף הוא 4 או 5, אז במקרים האלה ורק בהם יתקיים $A=\frac{2}{3}C$ או $B=\frac{2}{3}C$ בהתאמה, וכך נוכל לדעת איזה מטבע מזויף.
אם מטבע מזויף הוא 1 או 2 אז המספרים A, B, $\frac{2}{3}C$ שהם בעצם $2W$, $2W+D$, $2W+\frac{2}{3}D$ כולם שונים (אבל לא ידוע לנו מראש איזה מספר הוא A ואיזה B כי לא ידוע גם למה שווים D ו-W).
אנחנו נצייר את הערכים A, B, $\frac{2}{3}C$ על ציר מספרים, ונקודה $\frac{2}{3}C=2W+\frac{2}{3}D$ תחלק את הקטע AB ביחס 1:2. אם היא תהיה יותר קרובה ל-A אז $A=2W+D$ ואז המטבע הראשון הוא מזויף, ואם היא תהיה יותר קרובה ל-B אז, להפך, המטבע השני הוא מזויף.

למרות שפתרנו את השאלה ששאלו, מתעוררות שאלו חדשות. למה הם שאלו על 6 מטבעות ו-3 שקילות? למה לא שאלו על 7 מטבעות? או על 8 מטבעות? או על 9 מטבעות?
כמה שקילות צריך בשביל כמות נתונה של מטבעות? מה היא הכמות המרבית מטבעות שאפשר לפתור עבורם את הבעיה ל-3 שקילות? או ל-N שקילות?

השאלות האלה קשות מאוד. מספר ימים אחרי התחרות אחת מהתלמידים שהשתתפו בתחרות, אלכסיי גלדקיך, מצא את התשובות לשאלות האלה.

אנחנו ננסה לחקור את הבעיה של 3 שקילות מכיוונים שונים.

מצד אחד, שיקולים של מידע לא אמורים לעבוד כאן, כי בכל מהלך מקבלים מידע אינסופי. נניח שהצלחנו להמציא שיטה ל-K שקילות ו-N מטבעות, כמו ל-3 ו-6.
אחרי כל שקילה, נרשום על כל מטבע 0 אם היא לא הייתה על המאזניים ו-1 אם היא הייתה על המאזניים, כך אחרי השקילות, יהיה רשום על כל מטבע מספר בינארי של K ספרות (סדרה של K ספרות שכולם אפסים או אחדים).

סה"כ, לכל מטבעה מותאם אחד מ-2^K מספרים בינאריים, שמתאר את ההיסטוריה שלה במהלך השקילות.
כרגע, אחרי שהתבצעו השקילות, אנחנו צריכים להחליט איזה מטבע מזויף. בעיקרון כל מטבע היה יכול להיות מזויף, ואנחנו צריכים, על סמך תוצאות של השקילות, ולפי היסטוריה של מטבעות (מידע על כל מטבעה באיזה שקילות הוא היה על המאזניים ובאיזה שקילות הוא נשאר בחוץ), למצוא מטבע מזויף. לכן, אם לני מטבעות מסוימים יש היסטוריה זהה, ואחד מהם מזויף, אנחנו לא נוכל להבדיל בין שני מטבעות האלה – איזה מזויף ואיזה לא.

לכן ברור שאי-אפשר לפתור את הבעיה ל-9 מטבעות ב-3 שקילות: כל מטבעה מקבלת מספר בינארי של 3 ספרות בתור היסטוריה, לשני מטבעות שונים תהינה היסטוריות זהות, ואם אחד מהם תהיה מזויפת, לא ניגלה איזה בדיוק. מאותם שיקולים ברור גם שאי-אפשר לפתור את הבעיה ליותר מ-9 מטבעות.

נעבור כרגע למקרה של 8 מטבעות. כאן אולי יש שיטה, אבל כבר יש לנו מגבלות רציניות על האלגוריתם. אנו יודעים שאחרי המעשה כל מטבע צריך לקבל היסטוריה שונה.
היות ויש 8 היסטוריות שונות אפשריות, אז צריכה להיות התאמה של אחד לאחד בין המטבעות לבין ההיסטוריות השונות. כלומר, זה משאיר רק אלגוריתם אפשרי אחד. צריך לרשום מספרים בינאריים תלת0ספרתיים שונים על המטבעות. בשקילה ראשונה יש לשים על המאזניים אך ורק מטבעות שספרה ראשונה שלהם 1, בשקילה שנייה – את אלה שספרה השנייה שלהם 1, ובשקילה השלישית – אלא שספרה השלישית שלהם 1. בכל שקילה יש 4 מטבעות על המאזניים.
חוץ מהשיטה הזאת, אף שיטה אחרת לא תעבוד.

אבל האם השיטה הזאת עובדת? לא.
נניח שבכל השקילות יצא אותו משקל. זה אומר שאולי המטבע המזויף הוא זה שתמיד היה על המאזנים, שסומן 111, או זה שאף פעם לא היה על המאזניים, שסומן 000. אין דרך לדעת איזה מהם. לכן גם השיטה הזאת לא עובדת.
לכן עבור 8 מטבעות השאלה לא פתירה.

עבור 6 מטבעות – פתרנו קודם. נשאר להתמקד במקרה של 7 מטבעות.

גם פה חייבת להיות התאמה בין מטבעות למספרים בינאריים תלת-ספרתיים, אבל על מספר אחד אנחנו מדלגים. לכן יש רק 8 אסטרטגיות שונות, שעלולות לעבוד:
שיטה 000 :
כאשר מדלגים על מספר 000. אז בכל שקילה יש 4 מטבעות על המאזניים.
נראה שהשיטה הזאת לא עובדת. נניח שהמטבע המזויף הוא 100, והוא כבד יותר. אז המשקל בשקילה הראשונה יהיה קטן יותר מאשר בשני השקילות האחרונות, (ובשני השקילות והוא זהה).
אבל אותה תופעה תופיע אם המטבע המזויף הוא 011, והוא קל יותר.

שיטה 100:
מדלגים על מספר 100.
אז בשקילה הראשונה יש 3 מטבעות, ובשני שקילות האחרונות יש 4 מטבעות.
נניח שבשני שקילות האחרונות קיבלנו משקל זהה W, ובשקילה ראשונה קיבלנו משקל V, אבל $W / 4 \neq V / 3$.
לתופעה הזאת יכולים להיות שני הסברים: או שמטבעה 011 מזויף, או שמטבע 111 מזויף, ואין אפשרות להבדיל בין שני מקרים.
לכן גם השיטה 100 אינה טובה, מאותה סיבה, גם השיטות 010, וגם 001, אינן טובות.

שיטה 011:
מדלגים על מספר 011.
אז בשקילה הראשונה יש 4 מטבעות, ובשני שקילות האחרונות יש 3 מטבעות.
נניח שבשני שקילות האחרונות קיבלנו משקל זהה V, ובשקילה ראשונה קיבלנו משקל W, אבל $W / 4 \neq V / 3$.
לתופעה הזאת יכולים להיות שני הסברים: או שמטבעה 100 מזויף, או שמטבע 111 מזויף, ואין אפשרות להבדיל בין שני מקרים.
לכן גם השיטה 011 אינה טובה, מאותה סיבה, גם השיטות 110, וגם 101, אינן טובות.

שיטה 111:
כאשר מדלגים על מספר 111. אז בכל שקילה יש 3 מטבעות על המאזניים.
נראה שהשיטה הזאת לא עובדת. נניח שהמטבע המזויף הוא 100, והוא כבד יותר. אז המשקל בשקילה הראשונה יהיה קטן יותר מאשר בשני השקילות האחרונות, (ובשני השקילות והוא זהה).
אבל אותה תופעה תופיע אם המטבע המזויף הוא 011, והוא קל יותר.

מסקנה מתבקשת: הבעיה של 7 מטבעות ו-3 שקילות אינה פתירה!
הרי בדקנו את כל השיטות שעלולות לתת פתרון וראינו שאף שיטה לא מתאימה.

עובדה: למרות כל מה שאמרנו, קיים פתרון עבור 7 מטבעות ו-3 שקילות!

כיצד זה מסתדר אם הוכחה שהצגנו?
תשובה: בהוכחה יש טעות. הצלחתי לרמות אותך.

הקוראים מתבקשים לעצור לכמה דקות ולנסות למצוא את הטעות לבד.

הטעות הזאת לא רק מבטלת את ההוכחה שאין פתרון ל-7, אלה גם מבטלת את ההוכחות עבור 8 מטבעות ועבור כל קמות של מטבעות הגדולה מ-8.

בעצם, ההוכחות שהבאנו הם לא לגמרי חסרות משמעות.
השיקולים נעשו תחת הנחה סמויה שנחנו צריכים להגיש את תוכנית השקילות מראש. לא נילקח בחשבון שיש אפשרות לשנות את תוכנית השקילות תוך כדי המשחק, בהיסתמך על מידע שאנחנו מקבלים בשקילות הקודמות.
אם אנחנו יכולים לתת שיטה אדפטיבית, כאשר אנחנו מחליטים על המהלך הבא לפי התוצאות של מהלכים הקודמים, אז יש הרבה יותר אפשרויות להרכיב את האלגוריתמים, ויותר סיכוי להצליח.
בעצם, מה שהוכחנו קודם, בשיקולים הבינאריים שלנו, אפשר לנסח כך:
אלגוריתם לא אדפטיבי, שמוגדר מראש, לא יכול לפתור את הבעיה עבור 7 מטבעות או יותר ב-3 שקילות. אם אנחנו רוצים לפתור את השאלה עבור 7 מטבעות, צריך לחשוב על שיטה אדפטיבית בכל מקרה.
מצד שני, אנחנו צריכים לחשוב על דרכים נוספות להוכיח כי אי-אפשר לפתור את השאלה עבור הרבה מטבעות ב-3 שקילות, כי בהוכחה הקודמת יש פגם.

נחלק את כל המטבעות ל"קבוצות מבחן". באותה קבוצת מבחן יהיו מטבעות, שיש להם היסטוריה משותפת (כלומר בכל שקילה הם היו בו-זמנית על המאזניים או בו זמנית מחוץ למאזניים).
כלומר בהתחלה יש רק קבוצת מבחן אחת, אחרי שקילה ראשונה יש כנראה 2 קבוצות מבחן, אחרי שני שקילות יש אולי 4 קבוצות מבחן.

נניח שיש סה"כ 9 מטבעות. באמצעות שקילה ראשונה חילקנו את המטבעות ל-2 קבוצות מבחן, שבאחת מהן יש לפחות 5 מטבעות. אם אין לנו מזל, יתכן שהמטבע המזויף יהיה בקבוצת מבחן הגדולה.
באמצעות השקילה השנייה, קבוצת מבחן החשודה תתחלק ל-2 קבוצות מבחן שבאחת מהן יש לפחות 3 מטבעות. אם יש לנו מזל רע, יתכן שהמטבע המזויף יהיה בקבוצת מבחן הגדולה (וזה לא תלוי בחלוקה).
מאותם שיקולים, אחרי השקילה השלישית, יתכן שהמטבע המזויף נמצא בקבוצת מבחן הגדולה, שיש בה לפחות 2 מטבעות.
אבל אז לא נוכל לקבוע באמצעות שיקולי היגיון איזה מטבע מקבוצת מבחן החשודה היא המטבע המזויף.
ובכן, בעיה של 9 מטבעות (או יותר) לא פתירה ב-3 שקילות. (ועכשיו זה נכון).

נחקור את הבעיה של 8 מטבעות. ברור שכדי להצליח, חייבים לפצל בשקילה הראשונה את 8 מטבעות לשתי קבוצות מבחן שוות. הרי אם באחת משתי קבוצות מבחן אחרי השקילה הראשונה יהיו 5 מטבעות, אז אנחנו נהיה בבעיה שכבר תיארנו כאשר דיברנו על 9 מטבעות.
ובכן, בשקילה הראשונה חייבים להניח 4 מטבעות על המאזניים ולהשאיר 4 מטבעות בצד. אחרי השקילה הראשונה, יש שתי קבוצות מבחן, כל אחת של 4 מטבעות, ומטבעה מזויף עלול להיות כל אחד מ-8 מטבעות.
לכן, אנחנו חייבים במהלך שקילה השנייה לפצל את כל אחת משתי קבוצות המבחן לשני חלקים שווים, כך שיוצרו 4 קבוצות מבחן של 2 מטבעות בכל אחת. אחרת, תיוצר קבוצת מבחן של 3 מטבעות לפחות, ואם אין לנו מזל אז דווקא בה יש מטבעה מזויף ולא נוכל לאתר אותו בשקילה שלישית.

ובכן, ברור מה צריכות להיות שתי השקילות הראשונות: בשקילה ראשונה שוקלים מטבעות 1, 2, 3, 4 ובשקילה שנייה שוקלים מטבעות 1, 2, 5, 6.
לשתי שקילות ראשונות יכולים להיות שני סוגים של תוצאות:
(א) המשקלים בשתי השקילות היו שווים. אז המטבע המזויף הוא 1, 2, 7, או 8, כלומר הוא בקבוצות מבחן 11 או 00 (אלה שהיו פעמים או לא היו אף פעם על המאזניים).
(ב) המשקלים בשתי השקילות היו שונים. אז המטבע המזויף הוא 3, 4, 5, או 6, כלומר הוא בקבוצות מבחן 10 או 01 (אלה שהיו פעם אחד על המאזניים).

נניח שיצא אפשרות (א), כלומר בשתי השקילות הראשונות יצא משקל W.
בשקילה השלישית אנחנו חייבים לפצל כל אחת מתי קבוצות מבחן החשודות, כלומר מתוך המטבעות 1 ו-2 מטבעה אחת בדיוק תגיע למאזניים, נניח שזה המטבעה 1, וגם מהמטבעות & ו-8 רק מטבע 7 יגיע למאזניים, ובנוסף אפשר להניח על המאזניים עוד כל כמות של מטבעות שהם בטוח אמיתיים, מ-0 עד 4, כך שסה"כ ישתתפו בשקילה שלישית K מטבעות והמשקל יצא U.
אם $^{U}/_{K} = {}^{W}/_{4}$ אז ברור שמטבעה 8 מזויף, אבל אם לא אז המטבע המזויף יכול להיות 1, 2 או 7 ואין שום דרך לדעת. לכן אין שיטה לפתור את השאלה ל-8 מטבעות ב-3 שקילות (ועכשיו זה נכון).

ל-7 מטבעות, כמו שכבר אמרנו קיימת שיטה, והיא הומצאה על ידי אלכסיי גלדקיך. הרעיון של אלכסיי היה, שצריך לחפש משהו קצת מוזר ולא סימטרי, אפילו משהו מכוער, שבכל שקילה תהיה כמות שונה של מטבעות, כי אז יהיו יותר יחסים אלגבריים בין המשקלים שהתקבלו בשקילות שונות.

כמובן גם, שצריך לנסות לפצל את הקבוצות החשודות לקבוצות מבחן שוות, כדי שבסוף קבוצת מבחן חשודה תהיה קטנה מאד.
שקילה ראשונה לבד לא נותנת שום מידע, לכן שתי השקילות הראשונות יכולות להיות מוגדרות מראש, אבל השקילה השלישית צריכה להיות תלויה בתוצאות של שתי שקילות ראשונות.

נציג את השיטה של אלכסיי :
(בטבלא בעמוד הבא מסומן, איזה מטבעה משתתף באיזה שקילה)

	1	2	3	4	5	6	7	משקל כולל
שקילה ראשונה	V	V	V	V				A
שקילה שנייה			V	V	V			B
שקילה שלישית	V		V		V	V	V	C
או						V		C

אחרי שתי שקילות ראשונות תיתכן אחת משני אפשרויות:

(א) ${}^{A}/_{4} \neq {}^{B}/_{3}$

ז. א. שהמטבע המזויף הוא אחד מ-5 המטבעות הראשונים.
אז נשתמש בשיטה ראשונה עבור שקילה שלישית (כאשר שוקלים 5 מטבעות: את 1, 3, 5, 6, ו-7)

(ב) ${}^{A}/_{4} = {}^{B}/_{3}$

ז.א. המטבע המזויף הוא אחד מ-2 המטבעות האחרונים.
אז בשקילה השלישית נשקול את המטבעה 6. אם משקלו שווה ל- ${}^{A}/_{4}$ אז המטבעה 6 הוא אמיתי ומטבע 7 מזויף, ואם לא אז המטבעה 6 הוא מזויף.
לכן, אפשרות ב' היא פשוטה מאוד ואפשר רק להסביר מה קורה באפשרות א'.

1. אם המטבע המזויף הוא 1, אז $C - A = B / 3$.
2. אם המטבע המזויף הוא 2, אז $C / 5 = B / 3$.
3. אם המטבע המזויף הוא 3, אז $C + B = 2A$.
4. אם המטבע המזויף הוא 4, אז $A - B = C / 5$.
5. אם המטבע המזויף הוא 5, אז $C - B = A / 2$.

(הקוראים מתבקשים לבדוק לבד את הזהויות האלגבריות שרשמנו)
ובכן, במקרה (א) נוכל לבדוק איזו מהנוסחאות נכונה ולפי זה לדעת איזה מטבע מזויף. אבל האם יכול להיות שיתקיימו שני נוסחאות בו-זמנית?
התשובה היא לא, אבל חייבים להוכיח את זה. לשם כך נסמן
$a = A / 4$, $b = B / 3$, $c = C / 5$, ואז הנוסחאות יקבלו צורה:

1. $5c = 4a + b$.
2. $c = b$.
3. $8a = 5c + 3b$.
4. $4a = 3b + c$.
5. $5c = 3b + 2a$.

ברור שכל מספרים a,b,c לא יכולים להיות שווים, אחרת כל המטבעות אמיתיים.

תרגיל. אם נתון $x = \frac{ky+mz}{k+m}$, אז או שמתקיים $x = y = z$ או שהמספר x נמצא בין המספרים y , z על ציר המספרים. במקרה כזה הוא x מחלק את הקטע yz ביחס $m : k$ כלומר $(y - x) : (x - z) = m : k$.

x נקרא ממוצע משוכלל או מרכז כובד של מספרים y , z ומספרים k , m נקראים משקלים. מרכז כובד תמיד קרוב יותר לקצה שיש לא יותר משקל.

בכל מקרה, מהנוסחאות שרשמנו רואים, שרק במקרה שהמטבע מזויף הוא 2 אז c = b אבל a שונה. במקרים 1, 5, המספר c יהיה בין המספרים a , b כאשר נצייר את המספרים a , b , c על ציר המספרים, ואילו במקרים 3 , 4 המספר a יהיה בין המספרים b , c.

למה נוכל להבדיל בין מקרה 1 למקרה 5 ?
במקרה 1 המספר c יהיה קרוב יותר ל- a (פי 4) מאשר ל- b, ובמקרה 5 המספר c יהיה קרוב יותר ל- b מאשר ל- a.

למה נוכל להבדיל בין מקרה 3 למקרה 4 ?
בשני המקרים המספר a יהיה בין המספרים b , c.
אבל במקרה 4 המספר a יהיה קרוב יותר ל- b (פי3) מאשר ל- b, ובמקרה 3 המספר a יהיה קרוב יותר ל- c מאשר ל- b.
לכן כל המקרים ניתן להבדיל אחרי השקילות שלנו!

אז מצאנו שיטה ל-7 מטבעות!!
מוסר השכל: למרות שיש שיטות כלליות, למשל מידע שמאפשר לפתור את רוב הבעיות הכלליות, אבל תמיד, אפילו במטבעות, יהיו בעיות שלא נפתרות באמצעות שיטות כלליות. במקרים כאלה נצטרך לחשוב ולהמציא משהו לא צפוי בשביל לפתור את הבעיה.

תרגילים לפתרון עצמי:
נניח, שמותר לבצע K שקילות על המאזניים מהדגם החדיש, כאשר $K > 3$, ונתונות N מטבעות, שאחת מהם מזויף.

א. הוכח/י שלא ניתן לאתר מטבע מזויף אם $N > 2^K$.
ב. הוכח/י שלא ניתן לאתר מטבע מזויף אם $N = 2^K$, בשיטה שבה השקילות מוגדרות מראש .
ג. (*) מצא שיטה למצוא את המטבע המזויף כאשר $N = 2^K$.