מטבעות ומידע.

קיימות לא מעט בעיות שקשורות למטבעות ומאזניים. בבעיות כאלה מבקשים למצוא מטבעות מזויפות או מידע אחר, באמצעות כלי שנקרא מאזניים. בדרך כלל מתכוונים למאזניים שיש להם שני כפות. בכל שקילה המאזניים מראים, מה יותר כבד: המטבעות שמונחות על הכף הימני, או המטבעות שמונחות על הכף השמאלי, או שיש שוויון.
ניתן לפתור בעיות כאלו באמצעות ברירה ובדיקה. בבעיה מסוג כזה בד"כ מבקשים למצוא סדרה של שקילות (אלגוריתם) ולהוכיח שהאלגוריתם מוביל אותנו לתשובה **בכל מקרה**. כדי שהבעיה תהיה מאתגרת, דורשים שהאלגוריתם יהיה יעיל: כלומר, שישתמש במספר קטן מאוד של שקילות.

קיימות דוגמאות רבות של הבעיות מהסוג הזה, למשל:
בעיה 1. 10 מטבעות מסודרים בשורה. בין המטבעות יש גם אמיתיים, שמשקלם 7 גרם כל אחד, וגם מזויפים שמשקלם 8 גרם כל אחד. נתון שכל מטבע מזויף נמצא מימין ביחס לכל מטבע אמיתי. האם אפשר באמצעות שתי שקילות בלבד על מאזני כף למצוא את כל המטבעות האמיתיים? אם כן, הראה כיצד לעשות זאת, ואם לא, הסבר מדוע. (במאזנים שניתנו אפשר רק לבדוק על איזו מהכפות יש משקל גדול יותר. המאזנים לא מראים את המשקל, ולא ניתנו משקולות נוספות.)
בעיה 2. נתונות 2 משקולות לבנות, 2 משקולות כחולות, ו- 2 משקולות שחורות. בכל זוג באותו צבע יש משקולת כלה ומשקולת כבדה. משקולות כבדות מכל הצבעים זהות במשקל, וגם משקולות כלות מכל הצבעים זהות במשקל. מצא בעזרת מאזניים על ידי 2 שקילות בלבד את כל המשקולות כבדות.
בעיה 3. נתונים 20 מטבעות. ידועה, שאחד מהמטבעות מזויף, וכבד יותר מהמטבעות האחרים.
יש לאתר את המטבע המזויף ב-3 שקילות בלבד.
בעיה 4*. נתונים 12 מטבעות. ידועה, שאחד מהמטבעות מזויף, ומשקלו שונה מהמשקל של המטבעות האחרים (לא ידוע האם הוא קל יותר או כבד יותר). יש לאתר את המטבע המזויף ב-3 שקילות בלבד.

אלו שאולות קלאסיות. כמובן, אפשר לשאול שאלות אחרות. למשל בשאלה 3 מה היה קורה אם היו 30 מטבעות ולא 20. האם 3 שקילות היו מספיקות?
ואם היו 25 מטבעות?
גם בשאלה מספר 4 אפשר לשאול, האם אפשר לפתור את הבעיה עבור 13 או 14 מטבעות ב-3 שקילות?

כמובן אפשר להגיד שכדי לפתור בעיה כזאת מספיק רק לבדוק כמות מסוימת של אפשרויות, ושאפשר לעשות את זה כאשר יש מספיק זמן וסבלנות, ולכן זה אולי לא מעניין לפתור בעיות כאלה.
ואם לא, אז אולי אפשר לבדוק את כל האפשרויות באמצעות המחשב.
ואם מחשב יכול לעשות את זה, אז למה שבן-אדם ישקיע בזה זמן?

ביקורת כזאת כלפי בעיות עם מטבעות פגומה ביסודה. קודם כל, כאשר בעיה מאוד מסובכת מאוד (כמו שאלה 4) אז קשה מאוד לבדוק את כל האפשרויות ורק בן אדם מוכשר מאוד יכול לפתור שאלה כזאת.
הטענה שמחשב יכול לפתור כל שאלה של ברירה ובדיקה יכולה להיות נכונה, כמו הטענה שמכונית נוסעת יותר מהר מאשר אלוף העולם בריצה מסוגל לרוץ, ולכן בני אדם לא צריכים לרוץ יותר. למרות זאת, יש לא מעט אנשים שרצים כל בוקר, והם עושים את זה לא כדי להגיע למהירות המרבית (אחרת הם היו פשוט קונים מכונית) אלה בשביל הבריאות והכיף שלהם.
למחשב יש את היכולת לבצע כמות גדולה של חישובים ובדיקות בלי להתאמץ, אבל היכולת הזאת היא מוגבלת. כמו כן, למחשב יש יכולת לבצע המון פעמים סדרת הוראות שנכתבה פעם אחת.
לכן תוכנה שנכתבה ע"י מתכנת שהרגיל את עצמו לחשוב ולבדוק אפשרויות שונות בראש תהיה יעילה ותרוץ מהר. ותוכנה אחרת, שנכתבה ע"י מתכנת שלא הרגיל את עצמו לחשוב כשהוא היה קטן, יכולה לקחת את כל המשאבים של המחשב ולתקוע את המחשב לשעות שלמות. לכן, אנו רוצים להמליץ לכל הקוראים שרוצים ללמוד לנצל את המחשב בצורה יעילה להרגיל את עצמם לחשוב, ולפתור בעיות מתמטיות זו דרך טובה לעשות זאת.

הזכרנו כבר ששאלה מספר 4 היא קשה מאוד, ורק בן-אדם מוכשר מאוד יכול לפתור אותה, אבל תכף אנחנו נסביר מושג מתמטי חשוב שעוזר לפתור שאלות כאלה. כי כמות של האפשרויות שצריך לבדוק תצטמצם בצורה משמעותית.
עבור כל בן אדם שיבין את המושג הזה, רוב השאלות על מטבעות ייהפכו לשאלות פשוטות מאוד, וגם שאלה מספר 4 תהפוך לשאלה פשוטה.

למושג הזה קוראים ***אינפורמציה*** או ***מידע***.

לפני שניתן הגדרה פורמאלית, נראה עוד שאלה, שהיא אומנם לא מדברת על מטבעות אבל עוזרת להבין מה זה מידע.
בעיה 5. יעל ואריאל משחקים במשחק כזה. יעל בוחרת מספר מ-1 עד 100 ולא מגלה אותו לאריאל. אריאל רוצה לגלות את המספר. מותר לו לשאול את יעל שאלות כאלה שהתשובה עליהן היא "כן" או "לא". כמה שאלות הוא צריך לשאול כדי לגלות את המספר?
תשובה. 7.
כדי לפתור את הבעיה, צריך להוכיח את התשובה בשני הכיוונים. כיוון אחד זה להסביר למה 7 שאלות זה מספיק, כלומר להראות שיטה שמאפשרת לנחש מספר ב-7 שאלות. הכיוון השני זה להסביר, למה פחות מ-7 שאלות לא יספיקו. כלומר צריך להראות שלא קיימת שיטה שתמיד עובדת ע

הכיוון הקל. צריך למצוא שיטה לנחש מספר ב-7 שאלות. אנחנו נראה שני שיטות לעשות את זה (לאנשים שלא יודעים רישום בינארי לאנשים שכן).

שיטה ראשונה. השאלה הראשונה היא "האם המספר גדול מ-50?"
אחרי זה אריאל יודע שלמספר של יעל יש רק 50 אפשרויות.

הוא ייקח מספר N שבדיוק חצי מהמספרים האפשריים שנשארו יותר גדולים ממנו, וישאל " האם המספר שלך גדול מ-N ? " אחרי שני תשובות כבר יהיו 25 אפשרויות.
נשאל שאחות בצורה כזאת. אחרי תשובה לשאלה השלישית יישארו 12 או 13 אפשרויות. אחרי תשובה לשאלה הרביעית – 6 או 7 אפשרויות.
אחרי תשובה לשאלה החמישית – 3 או 4 אפשרויות.
אחרי תשובה לשאלה השישית – 2 או 1 אפשרויות.
אחרי תשובה לשאלה השביעית – נדע את המספר.
שיטה שנייה. נניח שקוראים שלנו, יעל, ואריאל מכירים שיטת רישום בינארית (זו שיטה לרשום מספרים שדומה לשיטה העשרונית, אבל משתמשים רק ב-2 ספרות: "0" ו- "1". אז כל מספר מ-0 עד 127 אפשר לרשום באמצעות 7 ספרות בינאריות).
בהתחלה אריאל יבקש מיעל שתרשום את המספר שלה בשיטה בינארית (בלי לגלות לו). בשאלה מספר K אריאל ישאל:
"האם הספרה מספר K מהסוף היא 1 ?"
אם היא תשיב לא כן, אז הוא ירשום לעצמו "1", אחרת הוא ירשום "0", הוא יכתוב מימין לשמאל. אחרי 7 שאלות הוא יקבל את המספר של יעל ברישום בינארי.

הכיוון הקשה. נוכיח שפחות מ-7 שאלות לא יספיקו. זה הרבה יותר קשה. הרי אם בכיוון הכל היה מספיק להראות שיטה אחת, פה צריך להוכיח שאף שיטה של 6 שאלות לא תהיה טובה. לעבור על כל השיטות של 6 שאלות זו בדיקה ארוכה מדי.
נניח שאריאל שעל רק 6 שאלות, ורשם את התשובות של יעל. כרגע יש לו 6 תשובות שכל אחת מהן היא "כן" או "לא", כלומר הוא קיבל מיעל אחת מתוך $2^6 = 64$ תגובות אפשריות. והוא אמור לנחש אחד מתוך 100 מספרים.
כלומר הוא צריך להמציא שיטה לדעת אחד מ-100 מספרים וכל מה שהוא יודעה זו אחת מתוך 64 סדרות של תשובות. לכל סדרה של תשובות צריך לתת מספר. אבל $64 < 100$.
לכן או שיהיה מספר שלא מתאים לאף תגובה של יעל (ואז אריאל לא יכול לנחש אותו) או שיש סדרת תגובות שמתאימה לשני מספרים שונים, ואז יש מקרה אריאל לא יוכל לדעת איזה מספר מתוך שני מספרים יעל בחרה.
בלשון מתמטי יותר: צריך למצוא פונקצית על מקבוצה של 64 איברים לקבוצה של 100 איברים, וזה בלתי אפשרי!!

מידע. נניח שיש מערכת שיכולה להיות בכל אחד מתוך N מצבים (ורק באחד מהמצבים האלה). אז מספר N או כל פונקציה עולה של N יכול להיות מדד לכמות המידע שמערכת מכילה.
בעצם, ההגדרה של מידע או אינפורמציה זה לוגריתם של N, למשל $\log_2(N)$ או $\log_{256}(N)$.
נסביר את הסיבה לשימוש בלוגריתמים.
נניח כי יש כרטיס שעליו מותר לרשום כל אחד מ-100 אותיות או סימנים. אז הוא יכול להיות באחד מ-100 מצבים.

נניח שיש שני כרטיסים כאלה. אז הם ביחד יכולים להיות בכל אחד מתוך 100^2 מצבים. אם יש ארימה של 80 כרטיסים כאלה אז היא מכילה המון אינפורמציה, היא יכולה להיות באחד מתוך 100^{80} מצבים! אם היינו מגדירים מידע בלי לוגריתם, אז כאשר אנו מחברים שני מערכות רישום, היינו צריכים להכפיל את המידע. אבל אם אנו משתמשים בלוגריתמים, אז אפשר לחבר מידע.
כלומר אם כרטיס אחד מכיל $\log(100)$ מידע, אז שני כרטיסים מכילים $2\cdot\log(100)$, ואז 80 כרטיסים מכילים $80\cdot\log(100)$ מידע.
לכן נהוג להשתמש בלוגריתמים. יחידת מדידה ידוע מאוד היא bit, שזה קיצור של binary digit, כלומר "ספרה בינארית": bit יכול להיות באחת משני מצבים.
כלומר $\log_2(N)$ נמדד ביחידות של bit. יחידה ידוע אחרת היא בייט (byte), $\text{byte} = 8\cdot\text{bit}$. כלומר, היחידה שמכילה בייט יכולה להיות באחד מתוך 256 מצבים. כמו כן, $\text{kB}=\text{kilobyte} = 1024\cdot\text{byte}$,
$\text{MB} = \text{megabyte} = 1024\cdot\text{kilobyte}$, $\text{TB} = \text{terabyte} = 1024\cdot\text{megabyte}$.
כלומר, אם רשום על הדיסקט שהוא מכיל 1.44MB, זאת אומרת שהמחשב יכול להעביר את הדיסקט הזה לכל אחד מתוך $256^{1.44\times1024\times1024}$ מצבים (כמובן, זה לא שלם, לכן 1.44 זה ערך מקורב).

בעיה 6. כמה מידע מסוגל להכיל הדיסק הקשיח במחשב שלך? מה המשמעות של זה?

בעיה 7. יוסי טוען שהוא כתב תוכנה שמסוגלת להדפיס כל ספרה של $\sqrt{2}$. אחרי שמריצים את התוכנה, ולוחצים N פעמים על ENTER, המחשב מציג את הספרה מספר N של $\sqrt{2}$ אחרי הנקודה העשרונית. המחשב של יוסי לא מחובר לאינטרנט. יש להוכיח שהוא משקר.

פתרון לבעיה 7. נניח שיוסי צודק. למחשב יש מצב סופי (אולי גדול מאוד, אבל סופי) של מצבים. לכן אחרי מספר סופי של לחיצות על ENTER המצב יחזור בדיוק למצב שכבר היה. לכן לסדרת הספרות שהמחשב מדפיס יופיע מחזור, החל מרגע מסוים. לכן $\sqrt{2}$ זה שבר עשרוני מחזורי. לכן הוא מספר רציונלי.
אבל $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי! לכן זה לא יכול להיות, כלומר יוסי משקר.

נזכר בכיוון הקשה של בעיה 5 (למה פחות מ-7 ניחושים לא יספיקו). אנחנו יכולים לנסח את זה בצורה פשוטה. אם אריאל קיבל תשובות ל-K שאלות אז הוא קיבל K bit של מידע, כלומר 2^K אפשרויות. לכן, בשביל שהוא יוכל לנחש אחת מ-100 אפשרויות צריך שיתקיים $2^K \geq 100$.

אבל כיצד מידע עוזר לפתור שאלות על מטבעות?

פתרון לבעיה 3. היות ואנו מצוידים במושג של מידע אז נפתור ישירות את המקרה הכללי: כמות המטבעות היא M, ידועה, שאחד מהמטבעות מזויף, וכבד יותר מהמטבעות האחרים.
כמה שקילות צריך לבצע כדי לאתר את המטבע המזויף?

מכור המידע היחיד אלה המאזניים. בכל שקילה המאזניים נותנים אחת מ-3 תשובות לגבי שאלה "איזה כף כבד יותר" והתשובות הם "ימני", "שמאלי" או "שווה". לכן כמות האפשרויות עבור K שקילות שווה 3^K, ולכן צריך להתקיים $M \le 3^K$.

למשל, ב-3 שקילות כמות המטבעות הכי גדולה שיכולה להיות זו 27.
נסביר שיטת שקילה עבור 27, ונשאיר לקוראים בתור תרגיל להבין שיטת שקילה לכל M.
בשקילה ראשונה בכל כף של המאזניים נשים T מטבעות, ואז 27 – 2T מטבעות יישארו בצד. אבל מה הוא T?
אם הכף השמאלי כבד יותר, אז המטבע המזויף הוא אחד מתוך T על הכף השמאלי.
אם הכף הימני כבד יותר, אז המטבע המזויף הוא אחד מתוך T על הכף הימני.
אם יש שוויון אז המטבע המזויף הוא אחד מתוך 27 – 2T מטבעות שנשארו בצד.
לכן, אם אנחנו רוצים לסיים את המשחק בשתי שקילות נוספות, אז צריך שיתקיים $T \le 9$ וגם $27 - 2T \le 9$ משיקולי של מידע. כלומר, $T = 9$.
ובכן, מצאנו השקילה ראשון (ואין דרך אחרת): על כל כף נשים 9 מטבעות.
אחרי זה יש אותה בעיה אם 9 מטבעות חשודות ושני שקילות בלבד.
נשים על כל כף 3 מטבעות, ואז אחרי שקילה שנייה יישארו 3 מטבעות חשודות. בשקילה שלישית נשים על כל כף אחד מהמטבעות החשודות, ונאתר את המטבע המזויפת.

עבור כמות אחרת של מטבעות הקוראים יכולים למצוא שיטה לבד בתור תרגיל.

הקושי בהרכבת אלגוריתם כזה היא שצריך לבנות סדרה של שקילות וכאן יש הרבה אפשרויות. למשל, שקילה ראשונה משפיע על השקילה השנייה, וכמות האפשרויות עבור סדרה של שקילות הוא גדול מאוד.
אבל אנחנו הצלחנו לנחש השקילה הראשונה (בזכות חישוב המידע) בלי לחשוב על שקילות נוספות, וזה חסך לנו חשיבה, והפך בעיה לבעיה פשוטה מאוד.

בתור תרגיל אנו מציעים לקוראים להבין לבד שאפשר למצוא מטבע מזויפת עבור כל כמות של מטבעות עד 3^K כולל באמצעות K שקילות בלבד.

נדון בשאלה 4, כאשר לא ידוע מראש האם המטבע המזויפת היא קלה או כבדה יותר. בשאלה הקלאסית ש ועלים על 12 מטבעות, ולכן בנוסף לשאלה "איך לפתור שאלה עבור 12 מטבעות ו-3 שקילות?" אנו יכולים לשאול את עצמנו "האם 12 זה מספר הכי טוב? האם אפשר לפתור את השאלה עבור 13 או 14 מטבעות ו-3 שקילות?".
נתחיל משאלה על 12 מטבעות.
אנו נשתדל למצוא לא רק איזה מטבע מזויפת, אלא גם האם היא קלה או כבדה. אז סה"כ יש 12 אפשרויות עבור מטבע מזויפת, ו-2 אפשרויות עבור הסוג שלה, סה"כ 24 אפשרויות, וזה קטן מאשר 3^3 לכן יש תקווה.

פתרון לבעיה 4.

נתחיל בלנחש את המהלך הראשון. אם בשקילה ראשונה נשים K מטבעות על כל כף של מאזניים (סה"כ 2K מטבעות) ויצא אי-שוויון (הכף הימני יותר כבד מהשמאלי). אז כל אחת מ-2K מטבעות שהיו על המאזנים חשוד. במקרה כזה אם נגלה איזה מטבעה הוא מזויף, נדע גם האם הוא קל יותר או כבד יותר (אם הוא בכף השמאלי אז

אם אנחנו מסוגלים לבחור אחת מ-2K תשובות אפשרויות בתוך 2 מהלכים, אז $9 \geq 2K$, כלומר K אינו עולה על 4.

כלומר K לא יכול להיות גדול מדי. גם קטן מדי הוא לא יכול להיות. כי במקרה של שוויון נשארים בצד $12 – 2K$ מטבעות, וצריך לבדוק איזה מהם מזויף והאם הוא קל או כבד יותר. כלומר $K = 3$ (או פחות) זה מאט מדי: אז יישארו 6 מטבעות (או יותר) וזה נותן כבר 12 אפשרויות.

ובכן, בלי לבדוק הרבה מקרים הגענו למסקנה חד-משמעית: בשקילה ראשונה יש לשים על כל כף של מאזניים 4 מטבעות, להשאיר 4 מטבעות בצד.

צריך עכשיו להסביר כיצד למצוא מטבע מזויף בשתי שקילות באחד משני מצבים שאנחנו עלולים להגיע.

מקרה א: היה שוויון בשקילה ראשונה, כלומר יש 4 מטבעות שחשודים, ו-8 מטבעות שהם בטוח אמיתיים.

פה קל למצוא פתרון, למשל נשים על כף אחד 3 מטבעות חשודים ועל כף שני מטבעות אמיתיים. נשאיר לקוראים בתור תרגיל למצוא שקילה שלישית.

מקרה ב: היה אי-שוויון בשקילה ראשונה, כלומר יש 4 מטבעות שאחד מהם עלול להיות קל יותר, L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , עוד 4 מטבעות שאחד מהם עלול להיות כבד יותר, H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , ועוד 4 מטבעות שהן בטוח אמיתיים.

פה גם לא קשה למצוא שקילה שמובילה לפתרון, למשל נשים

L_1 , L_2 , H_1 בכף אחד ואת L_3 , L_4 , H_2 בכף השני.

נשאיר לקוראים בתור תרגיל להבין את השקילה השלישית.

ובכן, בזכות המידע חסכנו לעצמנו את הבדיקות ופתרנו בעיה ל-12.

נוכיח של-13 אי-אפשר למצוא שיטה ב-3 שקילות.

סה"כ 3 שקילות נותנים 3^3 אפשרויות. אם אנחנו רוצים לפתור בעיה עבור M מטבעות אז יש 2M אופציות שצריך להפריד, כי בעצם צריך לגלות איזה מטבעה מזויף והאם הוא קל יותר או כבד יותר ממטבע האמיתי.

אכן, ברור שלא נוכל לדעת על מטבעה שהוא מזויף בלי להשוות אותו למטבע אמיתי, כלומר בלי לשים את המטבע המזויף על המאזניים. לכן בכל מקרה כאשר נמצא את המטבע המזויף נדע האם הוא קל או כבד.

מפה רואים כבר ש-14 מטבעות זה מוגזם, כי $28 = 14 \times 2 > 27$.

כמו שהוכחנו כאשר חשבנו על מקרה של 12 אסור לשים בשקילה ראשונה יותר מ-4 מטבעות על לכל כף, אחרת במצב של אי-שוויון לא נוכל להסתדר. לכן בשקילה ראשונה יישארו בצד לפחות 5 מטבעות.

לכן במצב של שוויון נצטרך בשני שקילות לבחור אחת מתוך 10 אפשרויות אבל $10 > 9$ כלומר זה בלתי אפשרי. מש"ל.

ההוכחה האחרונה הייתה שקר זדוני. הקוראים מתבקשים למצוא בה שגייה.

רמז: השגייה נמצאת ליד המילה "ברור".

עכשיו נסביר, כיצד לפתור את שאלה של 13 מטבעות. מסתבר שאפשר לפתור אותה ב-3 שקילות.
האם באמת יש סיכוי שנדע שמטבע מזויף בלי לשים אותו על המאזניים?
אולי כן, אם בדקנו שכל המטבעות האחרים הם אמיתיים בעזרת מאזניים.
כלומר אם קיבלנו שוויון בכל 3 השקילות. כלומר, יש מטבעה אחד לכל היותר שנוכל לקבוע שהוא מזויף בלי לדעת אם הוא קל או כבד. וזה משנה את הכל.
כי בעצם עבור M מטבעות אז יש לא 2M אלה $2M - 1$ אופציות.
כלומר $2M - 1 \le 27$, כלומר $M \le 14$. כלומר, אפילו ל-14 מטבעות יש סיכוי למצוא שיטה (אבל לא ברור אם נמצא) בניגוד למה שאמרנו בהוכחה השגויה.

עבור 13 מטבעות נציג שיטה. ברור שבשקילה הראשונה צריך לשים 4 מטבעות על כל כף. אם יש אי-שוויון אז כבר דיברנו כיצד לפתור את זה.
לכן נניח שבשקילה הראשונה יש שוויון. נשארו בצד 5 מטבעות. קודם נבהלנו מזה, כי אז $2M = 10$. וזה אכן מצב רע אם אנחנו רוצים גם לדעת את סוג המטבע בסוף. אבל לא צריך! כמו שהסברנו עכשיו, מה שחשוב זה $2M - 1 = 9$.
נשווה עכשיו 3 מטבעות חשודים מול 3 מטבעות שהם בטוח אמיתיים.
כאן יש שני מקרים:
מקרא א'. אם המטבע המזויף הוא אחד מ-3 מטבעות שהיו על המאזניים בשקילה השנייה, אז נדע את זה ונדע גם האם הוא כבד יותר או קל יותר.
נניח והוא כבד יותר (אם הוא קל יותר פותרים את זה באופן דומה).
עכשיו נשים אחד מה-3 המטבעות החשודים על כל כף של מאזניים ועוד אחד יישאר בצד (זו שקילה שלישית). אם יש שוויון אז המטבע המזויף הוא זה שנשאר בצד, אחרת זה המטבעה הכבד יותר.
מקרא ב'. נניח כי המטבע במזויף לא היה על המאזניים בשקילה השנייה, ושוב נשאר בצד. אז יש שני מטבעות חשודים.
נשווה אחד מהמטבעות החשודים למטבעה שהוא כבר נבדק.
אם יצא אי-שוויון אז זה המטבעה החשוד, ונדע גם את הסוג שלו.
אחרת, המטבע החשוד זה המטבעה שהשאר בצד (כבר 3 פעמים), אבל אז לא נדע את הסוג שלו.
פתרנו את הבעיה ל-13 מטבעות!

עבור 14 מטבעות זה שונה. למרות שכמות המידע הוא בסדר $2M - 1 = 27$ אבל אחרי שקילה ראשונה הוא כבר לא יהיה בסדר. כי השאיפה שלנו זה לפצל את 27 אופציות ל-3 חלקים שווים. בשביל זה צריך להניח על המאזניים 9 מטבעות בשקילה ראשונה וזה אי-אפשר.
אבל, אם בנוסף ל-14 מטבעות האלה יש עוד מטבעה שהוא בוודאות אמיתי, אז אפשר לפתור את השאלה.

תרגיל לחשיבה עצמית. בדוק, לאיזה מספר הכי גדול של מטבעות אפשר לפתור את השאלה אם אפשר להשתמש ב-K שקילות:
(א) כאשר צריך למצוא את המטבע המזויף ואת הסוג שלו.
(ב) כאשר צריך למצוא את המטבע המזויף ולא צריך את הסוג שלו.
(ג) כאשר יש מטבע נוסף שאפשר להשתמש בו, שהוא בטוח אמיתי.

בעיה 8. (א) נתון בניין בן 30 קומות ושני כוסות זכוכית זהות. אריאל זורק את הכוסות מהקומות השונות של הבניין מספר פעמים. המטרה שלו היא לברר, באיזה קומה נמוכה ביותר הכוסות מתחילות להישבר. לאריאל אין סבלנות, לכן הוא רוצה לברר את זה במספר הקטן ככל האפשר של בדיקות.
כמה בדיקות הוא יצטרך לערוך?
(ב) שאלה כללית יותר:
כמה בדיקות צריך, כאשר יש לאריאל K כוסות ובניין בן N קומות?

פתרון לבעיה 8. ברור, שאם יש כוס אחד בלבד, אז צריך לבדוק את כל הקומות החל מהקומה הנמוכה ביותר, ולעלות כל פעם קומה אחת. עז אם נדלג שתי קומות או יותר, אז הכוס תשבר ואז בחיים לא נדע האם הקומה הנמוכה ביותר זו הקומה הזאת או הקומה הקודמת.
במקרה כזה אריאל יצטרך לערוך N בדיקות לכל היותר, כאשר יש N קומות.
נניח שאריאל מצא שיטה לפתור את השאלה לשתי כוסות ו-N קומות תוך B בדיקות.
נניח שבפעם הראשונה אריאל זורק את הכוס מקומה Q. אז אם הכוס תישבר אז הוא יישאר אם כוס אחת בידיים, ובניין שהצטמצם ל- $Q – 1$ קומות, ויש לו עוד $B – 1$ מהלכים.לכן ה-Q הגבוה ביותר שאריאל יכול להרשות לעצמו זה $B = Q$.
מאותן סיבות, בפעם השנייה הוא יכול להרשות לעצמו לזרוק את הכוס מקומה שהיא גבוהה יותר מהקומה שהוא כבר בדק ב- $B – 1$ קומות, כי אם הכוס תשבר הוא יישאר אם כוס אחד ויישארו לו $B – 2$ מהלכים.
ואם הכוס לא תשבר, אז הוא יכול לעלות בעוד $B – 3$ קומות, ואחרי זה בעוד $B – 4$ קומות וכן הלאה עד הרגע שהוא כבר עשה $B – 1$ מהלכים ואז הוא יכול לעלות עוד קומה אחת כי נשאר לו מהלך אחד.
מסקנה: יש שיטה לפתור את השאלה על 2 כוסות ב-B בדיקות, אם גובה הבניין אינו עולה על $B + (B – 1) + (B – 2) + . . . + 3 + 2 + 1 = B\cdot(B+1)/2$.
(נשאיר לקוראים בתור תרגיל לבדוק מה קורה עבור 30 קומות).
מה קורה ל-3 או יותר כוסות?
אפשר לפתור את השאלה בשיטה של "אינדוקציה" כלומר, לעבור מ-K כוסות ל-K+1 כוסות, כמו שבעצם התחלנו לפתור אותה. כלומר, עבור כוס אחד השאלה היא פשוטה, ואחרי זה מצאנו שיטה עבור שני כוסות.
באותה שיטה אם אנו יודעים לפתור את הבעיה ל-K כוסות, אפשר לעבור ל-K+1 כוסות. נגיד שמצאנו נוסחא ל-K כוסות: שאפשר לפתור את הבעיה עבור B שקילות לכל כמות של קומות עד $f(B, K)$ כולל (כלומר $f(B, K)$ זה מספר הגדול ביותר של קומות כזה שבעיה תהיה פתירה עבור K כוסות ו-B בדיקות).
אז אפשר לפתור את הבעיה עבור K+1 כך, כלומר למצוא את $f(B, K+1)$:

מהלך ראשון יכול להיות כל מהלך עד גובה של $f(B-1, K)+1$, כי אם במהלך הראשון הכוס ישבר אז נצטרך לפתור את הבעיה לקומות נמוכות יותר עבור K כוסות תוך $B-1$ בדיקות.

אם הכוס לא תשבר במהלך השני נוכל לעלות בעוד $f(B-2, K)+1$ קומות.

אם היא עדיין לא תשבר, במהלך השלישי נוכל לעלות בעוד $f(B-3, K)+1$ קומות וכן הלאה.

אם תוך $B-1$ בדיקות אף כוס לא תשבר, נוכל לעלות עוד $f(0, K)+1 = 1$ קומות. ובכן, מקבלים נוסחא:

$$f(B, K+1) = 1 + (f(1, K)+1) + (f(2, K)+1) + \dots + (f(B-1, K)+1) =$$

$$= B + \sum_{i=1}^{B-1} f(i, K)$$

למשל,

$$f(B, 3) = B + \sum_{i=1}^{B-1} \frac{i \cdot (i+1)}{2} = B + \frac{(B-1)B(B+1)}{6}$$

כמובן, חישוב של סכומים כאלה דורש מיומנות ועבודה קשה.

בשביל לחשב נוסחא עבור 10 כדורים צריך לחשב קודם את התשובה עבור 9, 8, 7, ... כדורים וזה לא קל. אבל בעזרת . . . מידע, אפשר להפוך את החישוב הפשוט יותר.

כמה מידע מקבל אריאל מתוך B בדיקות כאשר יש לו K כדורים? כמה תשובות אפשריות יש?

בעצם, הוא מקבל B תשובות של "כן" או "לא", כלומר "שרד" או "נשבר", וזה 2^B אפשרויות בעיקרון אבל... יש לו רק K כוסות, לכן הוא מסוגל לקבל "לא" רק K פעמים לכל היותר. כלומר הוא מקבל לא את כל הסדרות באורך B של "כן" ו"לא" אלה רק סדרות שבהם "לא" מופיע K פעמים או פחות.

יש $\binom{B}{0}$ דרכים לקבל 0 פעמים "לא", יש $\binom{B}{1}$ דרכים לקבל פעם אחד "לא", ועוד $\binom{B}{2}$ דרכים לקבל פעמיים "לא", . . . ובדיוק $\binom{B}{K}$ דרכים לקבל K פעמים "לא". סה"כ קיבלנו שיש $\binom{B}{0}+\binom{B}{1}+\binom{B}{2}+\dots+\binom{B}{K}$ תשובות אפשריות שאריאל יכול לקבל. וכמות הקומות שהוא יכול להבדיל לא יכולה להיות יותר גדולה מזה.

קל לראות (תרגיל לקוראים) שבשיטה האינדוקטיבית, כאשר בנינו את השיטה למצוא את הקומה למספר קומות המרבי בהינתן B, K אז כל הסדרות של "כן" ו"לא" שיש בהם לא יותר מאשר K פעמים "לא" יכולות להופיע, לכן $f(B, K)$ שווה בדיוק לסכום המקדמים הבינומיים שרשמנו, כלומר התשובה היא" סכום של $K+1$ מספרים ראשונים של שורה ה-B של משולש פסקל.

עגב, אם יש לאריאל הרבה מאוד (אינסוף) כוסות אז התשובה היא 2^B וזה בעצם שקול לשאלה 5. מצד שני זה סכום של שורה ה-B במשולש פסקל.

נראה עוד שאלה על מטבעות:

בעיה 9. (נלקחה מקוואנט 4, 2004, מהתחרות מתמטיקה 6-8)
11 מטבעות נמצאים בשורה, מתוכם יש 3 מטבעות מזויפים שנמצאים ברצף והיתר- אמיתיים. 3 מטבעות מזויפים שקולים במשקל וכבדים יותר מהאמיתיים. בכמה שקילות ניתן למצוא את המטבעות המזויפים?

המספר הסידורי של במטבע המזויף הראשון הוא מ-1 עד 9, כי אחריו באים עוד שני מטבעות מזויפים ברצף. לכן יש תקווה לפתור את הבעיה ב-2 מהלכים.
בשביל זה כבר המהלך הראשון צריך לחלק את 9 המצבים ל-3 קבוצות שוות.
למשל בקבוצה ראשונה יהיו מצבים בהם המטבעות המזויפים הם או 1,2,3 או 2,3,4 או 3,4,5 בקבוצה השנייה מצבים בהם המטבעות המזויפים הם 4,5,6 או 5,6,7 או 6,7,8 ובקבוצה השלישית מצבים בהם המטבעות המזויפים הם 7,8,9 או 8,9,10 או 9,10,11.
כלומר רוצים שמהלך ראשון יבדיל בין 3 מקרים: מטבע 3 מזויף, מטבע 9 מזויף, ואף אחד מהם לא מזויף.
לא קשה להמציא מהלך כזה: נשקול מטבע 3 מול מטבע 9.
נשאיר לקוראים את התענוג לסיים את הבעיה הזאת לבד, כמו גם את בעיות 1 ו-2, ולהכליל את בעיה 4.
בנוסף, ניתן עוד 2 בעיות לחשיבה עצמית:

בעיה 10. נתונות 5 מטבעות מתוכם 3 אמיתיים (זהים במשקל) ועוד 2 מזויפים (גם זהים במשקל אבל כבדים יותר). כמה שקילות צריך בשביל למצוא את המטבעות המזויפים?

בעיה 11*. יעל ואריאל משחקים במשחק כזה. יעל בוחרת מספר מ-1 עד 30 ולא מגלה אותו לאריאל. אריאל רוצה לגלות את המספר. מותר לו לשאול את יעל שאלות כאלה שהתשובה עליהן היא "כן" או "לא" (למשל, "האם המספר גדול מ-15 ?" או "האם המספר זוגי ?" או האם שארית של המספר כאשר מחלקים אותו ב-5 קטנה מ-3 ?").
אבל ליעל מותר לשקר פעם אחד.
כמה שאלות הוא צריך לשאול כדי לגלות את המספר?