התפוח לא נופל רחוק מהעץ

מאת אלמוג ילינביץ

במאמר הבא נדגים כיצד ניתן לפתור את אותה הבעיה באמצעות כלים מתימטיים ופיסיקליים שהיו זמינים ב-3 תקופות זמן שונות, או לחליפין, ב-3 רמות השכלה שונות.

הבעיה:

ניוטון יושב מתחת לעץ. לפתע, תפוח שנמצא בגובה L הישר מעל לראשו, מתחיל לפול. מה תהיה מהירות התפוח רגע לפני שיפגע בראשו של ניוטון?

פתרון במאה ה-16: קינמטיקה בסיסית (רמת תיכון)

התפוח מאיץ ממנוחה בתאוצה קבועה g כלפי מטה. הזמן שלוקח לו להגיע לראש של ניוטון הוא

$$L=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

לפיכך, רגע לפני הפגיעה בראשו של ניוטון מהירותו תהיה

$$\boxed{v=gt=g\sqrt{\frac{2L}{g}}=\sqrt{2gL}}$$

פתרון המאה ה-18: עקרון הפעולה המינימלית (רמת תואר ראשון)

אנו מגדירים את הלגרנז'יאן $\mathcal{L}$ להיות ההפרש בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, ואת הפעולה בתור

$$S=\int \mathcal{L}\left(x,\dot{x},t\right)\cdot dt$$

הפעולה מינימלית כאשר הלגרנז'יאן מקיים את משוואות אוילר-לגרנז'

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)$$

בבעיה זו, האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית הם בהתאמה $U=-mgx\,,E=0.5\cdot m\dot{x}^2$

כאשר m היא מסת התפוח. הלגרנז'יאן הוא

$$\mathcal{L}=E-U=0.5\cdot m\dot{x}+mgx$$

נציב במשוואות אוילר לגרנז' ונפתור

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx\right)=mg=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+mgx\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}\right)=m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}=g \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}\cdot\dot{x}=g\cdot\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \int \dot{x}\cdot d\dot{x}=\int g\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{x}^2=g\cdot x+C$$

לפי תנאי התחלה $x\left(t=0\right)=0,\quad \dot{x}\left(t=0\right)=0$ מתקיים $C=0$

$$\dot{x}\left(x\right)=\sqrt{2g\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v=\dot{x}\left(x=L\right)=\sqrt{2gL}}$$

פתרון המאה ה-20: תורת היחסות הכללית (רמת תואר שני)

במהלך הפתרון נשתמש במוסכמות הבאות: היחידות נבחרו כך ש- $c=1$, אינדקס שחוזר פעמיים מציין סכימה על פני כל ערכי האינדקס, ציר ה-x מצביע כלפי מעלה, t לכיוון העתיד, ומטעמי סימטריה, לא נתחשב בתנועה בכיוון y,z.

עקמומיות המרחב-זמן נתונה ע"י המטריקה של רינדלר

$$ds^2 = g_{ab}x^a x^b = -\left(1+ax\right)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

התפוח נע לאורך עקומה גאודזית, קרי, מסלול במרחב 4 מימדי שמקיים את משוואות הגאודזית

$$\frac{Du^a}{d\tau} = \frac{D}{d\tau}\left(\frac{\partial x^a}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \tau^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{\partial x^b}{\partial \tau}\frac{\partial x^c}{\partial \tau} = 0$$

כאשר Γ^a_{bc} סימני כריסטופל

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\right)$$

נחשב את האיברים הלא טריביאליים בסימני כריסטופל

$$\Gamma^t_{tx} = \frac{1}{2}g^{tt}\left(\partial_t g_{xt} + \partial_x g_{tt} - \partial_t g_{tx}\right) = \frac{g^{tt}\partial_x g_{tt}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1+ax\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1+ax\right)^2\right) = \frac{a}{1+ax}$$

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{1}{2}g^{xx}\left(\partial_t g_{tx} + \partial_t g_{tx} - \partial_x g_{tt}\right) = \frac{-g^{xx}\partial_x g_{tt}}{2} = \frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\left(1+ax\right)^2\right) = a\left(1+ax\right)$$

(כל שאר האברים הם 0). נציב במשוואות הגאודזיות

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \Gamma^t_{tx}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{a}{1+ax}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \Gamma^x_{tt}\frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + a\left(1+ax\right)\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 = 0$$

$$\frac{1+ax}{a}\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1+ax}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+ax}{a}\frac{\partial t}{\partial \tau} = const = A$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{Aa}{1+ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + a\left(1+ax\right)\left(\frac{Aa}{1+ax}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -\frac{A^2a^3}{1+ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial \tau}\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -\frac{A^2a^3}{1+ax}\frac{\partial x}{\partial \tau} \quad \Rightarrow \quad \int \dot{x}\cdot d\dot{x} = -\int \frac{A^2a^3}{1+ax}dx$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = B - A^2a^2\ln\left(1+ax\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \sqrt{2B - 2A^2a^2\ln\left(1+ax\right)}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}/\frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{2B - 2A^2a^2\ln\left(1+ax\right)}}{aA/\left(1+ax\right)} = \left(1+ax\right)\sqrt{\frac{2B}{A^2a^2} - 2\ln\left(1+ax\right)}$$

מכיוון ש- $x\left(\tau=0\right)=0, \quad \dot{x}\left(t=0\right)=0$ אז $B=0$ ו-

$$u = \left(1+ax\right)\sqrt{-2\ln\left(1+ax\right)}$$

נעזר בקירוב עבור $ax \ll 1$, נתקן את היחידות $a = g/c^2 \quad u = v/c$, ונציב $x=-L$ (כיוון שציר ה-x) פונה מעלה. נקבל:

$$u \approx \sqrt{-2ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{-2\frac{g}{c^2}\left(-L\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gL}}$$