

התפוח לא נופל רחוק מהעץ

מאת אלמוג ילינביץ

במאמר הבא נדגים כיצד ניתן לפתור את אותה הבעיה באמצעות כלים מתימטיים ופיסיקליים שהיו זמינים ב-3 תקופות זמן שונות, או לחליפין, ב-3 רמות השכלה שונות.

הבעיה:

ניוטון יושב מתחת לעץ. לפתע, תפוח שנמצא בגובה L הישר מעל לראשו, מתחיל לפול. מה תהיה מהירות התפוח רגע לפני שיפגע בראשו של ניוטון?

פתרון במאה ה-16: קינמטיקה בסיסית (רמת תיכון)

התפוח מאיץ ממנוחה בתאוצה קבועה g כלפי מטה. הזמן שלוקח לו להגיע לראש של ניוטון הוא

$$L = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

לפיכך, רגע לפני הפגיעה בראשו של ניוטון מהירותו תהיה

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2L}{g}} = \sqrt{2gL}$$

פתרון המאה ה-18: עקרון הפעולה המינימלית (רמת תואר ראשון)

אנו מגדירים את הלגרנז'יאן \mathcal{L} להיות ההפרש בין האנרגיה הקינטית לפוטנציאלית, ואת הפעולה בתור

$$S = \int \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \cdot dt$$

הפעולה מינימלית כאשר הלגרנז'יאן מקיים את משוואות אוילר-לגרנז'

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right)$$

בבעיה זו, האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית הם בהתאמה $U = -mgx$, $E = 0.5 \cdot m\dot{x}^2$

כאשר m היא מסת התפוח. הלגרנז'יאן הוא

$$\mathcal{L} = E - U = 0.5 \cdot m\dot{x} + mgx$$

נציב במשוואות אוילר לגרנז' ונפתור

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right) = mg =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \right) \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = g \Rightarrow \ddot{x} \cdot \dot{x} = g \cdot \dot{x} \Rightarrow \int \dot{x} \cdot d\dot{x} = \int g \cdot dx \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 = g \cdot x + C$$

לפי תנאי התחלה $x(t=0) = 0$, $\dot{x}(t=0) = 0$ מתקיים $C = 0$

$$\dot{x}(x) = \sqrt{2g \cdot x} \Rightarrow v = \dot{x}(x=L) = \sqrt{2gL}$$

פתרון המאה ה-20: תורת היחסות הכללית (רמת תואר שני)

במהלך הפתרון נשתמש במוסכמות הבאות: היחידות נבחרו כך ש- $c=1$, אינדקס שחוזר פעמיים מציין סכימה על פני כל ערכי האינדקס, ציר ה-x מצביע כלפי מעלה, t לכיוון העתיד, ומטעמי סימטריה, לא נתחשב בתנועה בכיוון y, z. עקמומיות המרחב-זמן נתונה ע"י המטריקה של רינדלר

$$ds^2 = g_{ab}x^a x^b = -(1+ax)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

התפוח נע לאורך עקומה גאודזית, קרי, מסלול במרחב 4 מימדי שמקיים את משוואות הגאודזית

$$\frac{Du^a}{d\tau} = \frac{D}{d\tau} \left(\frac{\partial x^a}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{\partial x^b}{\partial \tau} \frac{\partial x^c}{\partial \tau} = 0$$

כאשר Γ_{bc}^a סימני כריסטופל

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{cd} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

נחשב את האיברים הלא טריביאליים בסימני כריסטופל

$$\Gamma_{tx}^t = \frac{1}{2} g^{tt} (\partial_t g_{xt} + \partial_x g_{tt} - \partial_t g_{tx}) = \frac{g^{tt} \partial_x g_{tt}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+ax)^2} \frac{\partial}{\partial x} ((1+ax)^2) = \frac{a}{1+ax}$$

$$\Gamma_{tt}^x = \frac{1}{2} g^{xx} (\partial_t g_{tx} + \partial_t g_{tx} - \partial_x g_{tt}) = \frac{-g^{xx} \partial_x g_{tt}}{2} = \frac{-1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (-(1+ax)^2) = a(1+ax)$$

(כל שאר האיברים הם 0). נציב במשוואות הגאודזיות

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \Gamma_{tx}^t \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{a}{1+ax} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + \Gamma_{tt}^x \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + a(1+ax) \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 = 0$$

$$\frac{1+ax}{a} \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1+ax}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1+ax}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} = const = A$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{Aa}{1+ax} \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + a(1+ax) \left(\frac{Aa}{1+ax} \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -\frac{A^2 a^3}{1+ax} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = -\frac{A^2 a^3}{1+ax} \frac{\partial x}{\partial \tau} \Rightarrow \int \dot{x} \cdot d\dot{x} = -\int \frac{A^2 a^3}{1+ax} dx$$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 = B - A^2 a^2 \ln(1+ax) \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{2B - 2A^2 a^2 \ln(1+ax)}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{2B - 2A^2 a^2 \ln(1+ax)}}{aA/(1+ax)} = (1+ax) \sqrt{\frac{2B}{A^2 a^2} - 2 \ln(1+ax)}$$

מכיוון ש- $\dot{x}(t=0)=0$ ו- $x(\tau=0)=0$ אז $B=0$ ו-

$$u = (1+ax) \sqrt{-2 \ln(1+ax)}$$

נעזר בקירוב עבור $ax \gg 1$, נתקן את היחידות $a = g/c^2$, $u = v/c$ ונציב $x = -L$ (כיוון שציר ה-x פונה מעלה. נקבל:

$$u \approx \sqrt{-2ax} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{-2 \frac{g}{c^2} (-L)} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gL}}$$